Matemática II

Ángulos en el plano y Triángulos

Departamento de Matemática

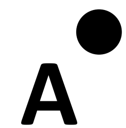
Preuniversitario Futuro

Aprendizaje Esperado

Conocer e identificar losconceptos básicos y los elementos primarios del triángulo.

CONCEPTOS BÁSICOS

1) Punto: Es un Concepto primitivo, es el elemento más simple de la geometría. Intuitivamente se le imagina como una mancha muy pequeña.



Es una idea, un ente de razón, que sólo existe en la mente del que lo piensa. Se le suele denotar con las letras mayúsculas, tales como A, B, C, etc.

2) Recta: Es la línea generada por un punto que se mueve sin cambiar de dirección. Intuitivamente, es similar a un hilo delgado y tenso que se extiende ilimitadamente en ambos sentidos

Recta L o Recta $\overleftrightarrow{AB}$

Se designa con un letra mayúscula o por dos letras mayúsculas y coronadas por una fecha en ambos sentidos.

CONCEPTOS BÁSICOS

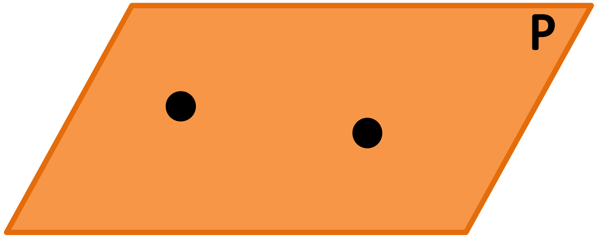
3) Plano: Es el conjunto infinitos de puntos.

Nuevamente, nuestra experiencia nos apoya. La superficie de una mesa, la superficie de una pizarrón, son soportes para abstraer e imaginar un plano.

Plano P

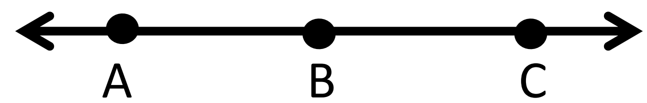
Tal como en la recta, el plano no tiene límites en sus dos dimensiones.

4) Puntos Coplanares: Son aquellos que pertenecen a un mismo plano.



CONCEPTOS BÁSICOS

5) Puntos Colineales: Son aquellos que pertenecen a una misma recta.

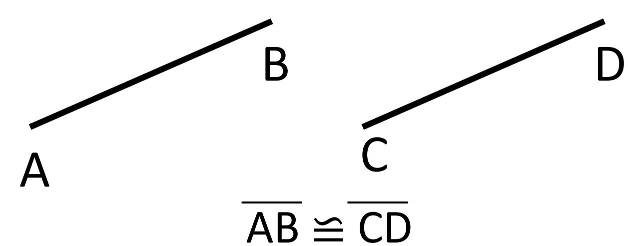


Los Puntos A, B y C son colineales.

6) Trazo: Dados dos puntos A y B en una recta, se le llama trazo o segmento a los puntos A y B y a todos los puntos de la recta que están entre A y B.

Los puntos A y B se denominan puntos extremos del trazo AB, se denota por $\overline{AB}$.

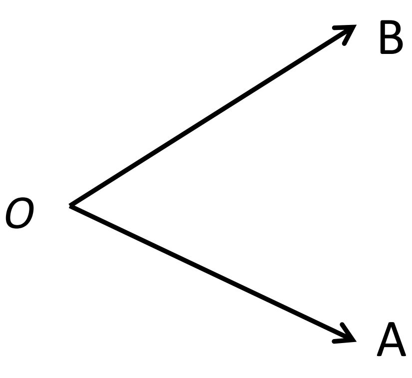
7) Trazos Congruentes: Dos trazos son congruentes si tienen la misma medida.



CONCEPTOS BÁSICOS

8) Rayo: Dados dos puntos A y B en una recta, se llama rayo AB al punto A y a todos los puntos de la recta al mismo lado en que está B respecto de A.
También diremos que el punto A es extremo del rayo AB, se denota $\overrightarrow{AB}$.

9) Ángulo: Figura geométrica compuesta por dos rayos distintos que salen de un punto en común, los rayos se denominan lados del ángulo y su origen vértice del mismo.



En la figura, el ángulo está formado por la unión de los rayos $\overrightarrow{OA}$ Y $\overrightarrow{OB}$, cuyo origen común es el punto O, que es el vértice del ángulo. Lo denotamos $\measuredangle AOB$, o simplemente $\measuredangle O$.

SISTEMAS DE MEDIDA

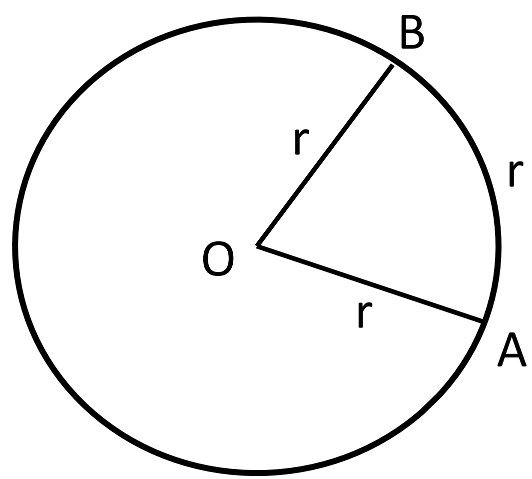
1) Sistema Sexagesimal: En este sistema se considera que la circunferencia está dividida en 360 partes sexagesimales.

Además, cada grado sexagesimal se divide en 60 partes congruentes llamados minutos sexagesimales y cada minuto se divide a su vez en 60 partes congruentes llamados segundos sexagesimales.

1 Circunferencia	=	360 grados
1 grado	=	60 minutos
1 minuto	=	60 segundos
1	=	360°
1 °	=	60’
1’	=	60”

SISTEMAS DE MEDIDA

2) Sistema Circular: En el sistema circular, la unidad de medida es el radián (rad), que es el ángulo del centro de una circunferencia correspondiente a un arco cuya longitud tiene igual medida que la longitud del radio de la circunferencia.

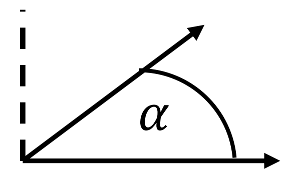


$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong arco\ AB$$

$$\measuredangle \mathrm{AOB} = 1\ \mathrm{rad}$$

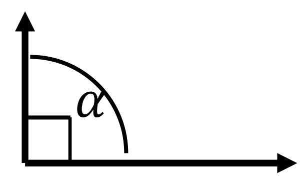
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

1) Ángulo Agudo: Es un ángulo cuya medida es mayor a 0° y menor a 90°.



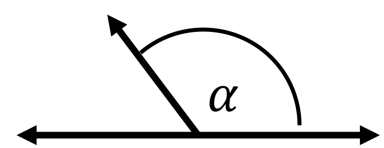
$0° < \alpha < 90°$

2) Ángulo Recto: Es un ángulo cuya medida es 90°.



$\alpha = 90°$

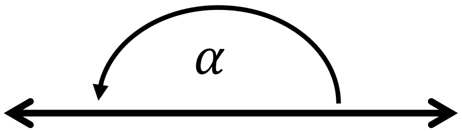
3) Ángulo Obtuso: Es ángulo cuya medida es mayor a 90° y menor a 180°.



$90° < \alpha < 180°$

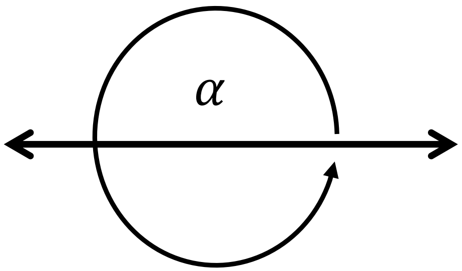
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

4) Ángulo Extendido: Es un ángulo cuya medida es 180°.



$\alpha = 180°$

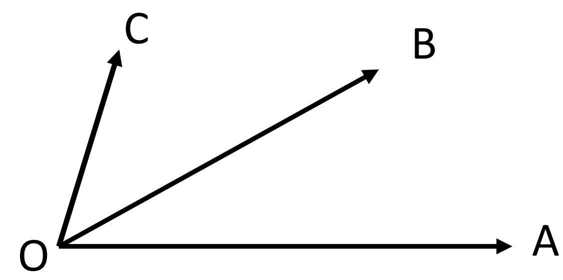
5) Ángulo Completo: Es un ángulo cuya medida es 360°.



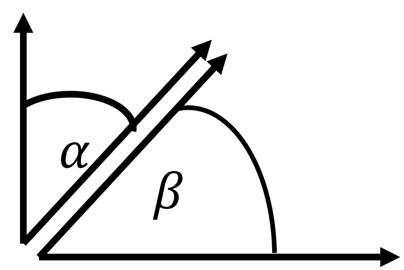
$\alpha = 360°$

RELACIÓN ENTRE DOS ÁNGULOS EN EL PLANO

1) Ángulos Contiguos: Son aquellos que tienen el vértice y un lado en común. ∡AOB contiguo al ∡BOC.

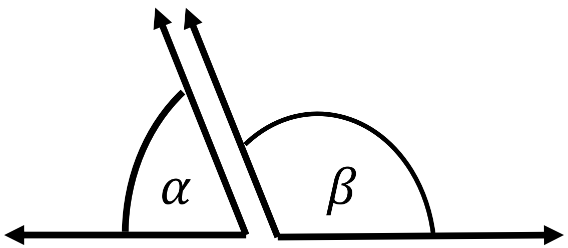


2) Ángulos Complementarios: Dos ángulos cuya suma de sus medidas es 90° se dicen complementarios.



α y β complementarios si $\alpha + \beta = 90°$

RELACIÓN ENTRE DOS ÁNGULOS EN EL PLANO



α y β suplementarios si $\alpha + \beta = 180°$

3) Ángulos Suplementarios: Dos ángulos cuya suma de sus medidas es 180° se dicen suplementarios.

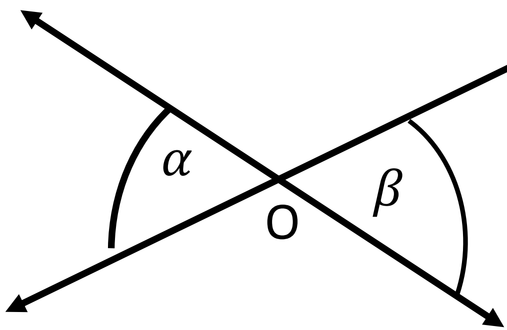
4) Complemento de un Ángulo: Es el ángulo que sumado con él complemento 90°. Si α es un ángulo agudo, su complemento se representa por:

$$\boxed{90° - \alpha}$$

5) Suplemento de un Ángulo: Es el ángulo que sumado con él completa 180°. Si α es un ángulo agudo u obtuso, su suplemento se representa por:

$$\boxed{180° - \alpha}$$

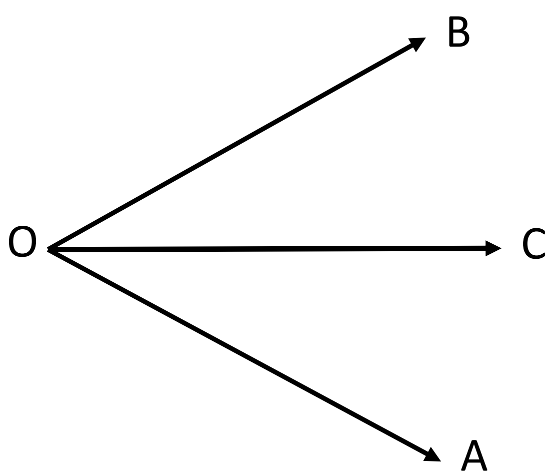
RELACIÓN ENTRE DOS ÁNGULOS EN EL PLANO



α y β son opuestos por el vértice

6) Ángulos Opuestos por el vértice: Dos ángulos son opuestos por el vértice, si los lados de uno son la prolongación de los lados del otro.

Los ángulos opuestos por el vértice siempre tienen la misma medida.



7) Bisectriz de un ángulo: Es el rayo que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

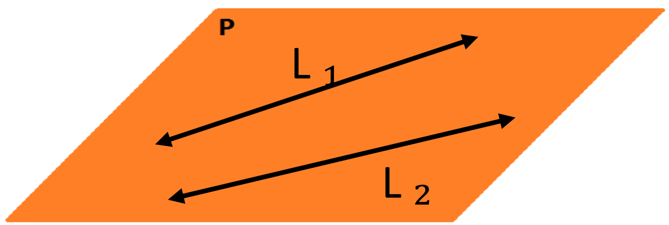
En la figura OC es bisectriz, entonces

$$\measuredangle AOC \cong \measuredangle COB$$

RELACIÓN ENTRE DOS RECTAS EN EL PLANO

1) Rectas Coplanares:

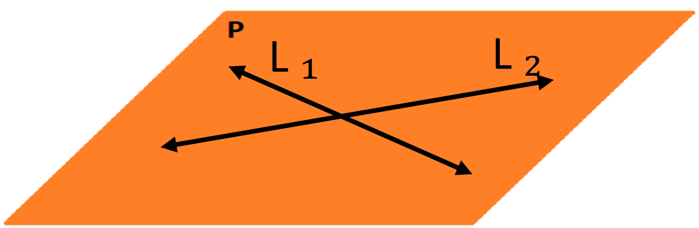
Son aquellas que pertenecen a un mismo plano.



L_1 y L_2 son coplanares

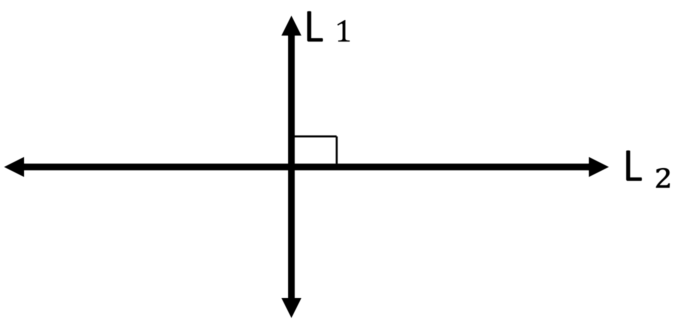
2) Rectas Secantes:

Dos rectas coplanares con sólo un punto en común se denominan secantes.



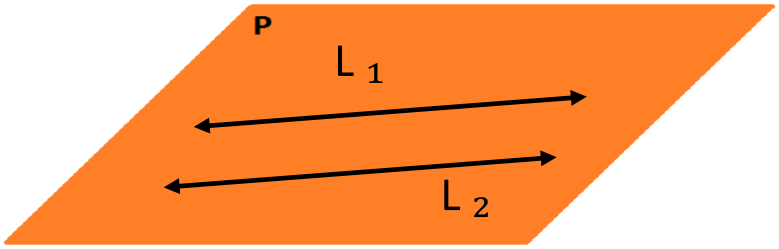
3) Rectas perpendiculares:

Dos rectas son perpendiculares si al cortarse forman cuatro ángulos rectos.



L_1 perpendicular a L_2: $L_1 \perp L_2$

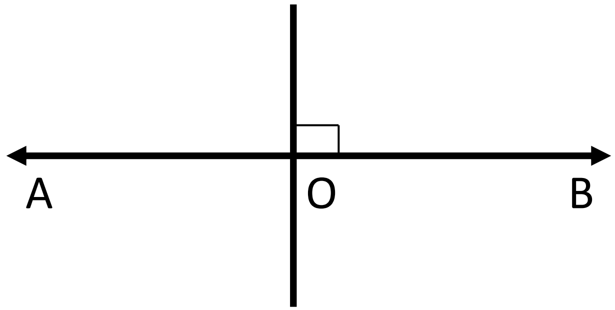
RELACIÓN ENTRE DOS RECTAS EN EL PLANO



L_1 paralela a L_2: L_1 // L_2

4) Rectas paralelas:

Son aquellas rectas que estando en el mismo plano, no tienen puntos en común.

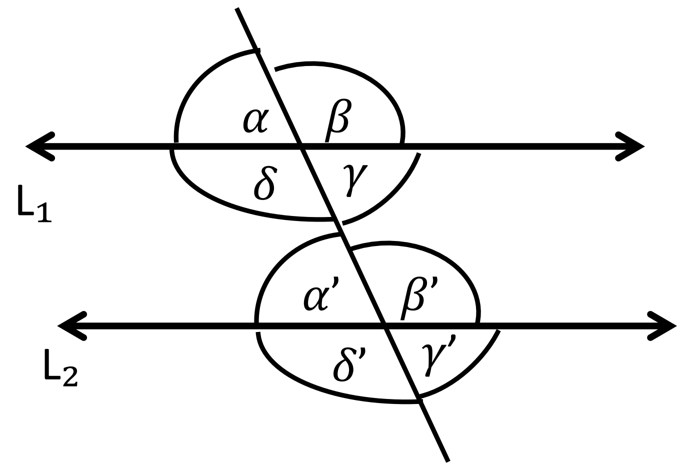


5) Simetral:

Dado un trazo $\overline{AB}$, se llama simetral a la perpendicular a $\overline{AB}$ que contiene al punto medio de dicho trazo.

ÁNGULOS ENTRE RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE O TRANSVERSAL

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante se forman 8 ángulos, de los cuales algunos son congruentes y otros suplementarios



Opuestos por el vértice:

$\alpha \cong \gamma$; $\beta \cong \delta$

$\alpha' \cong \gamma'$; $\beta' \cong \delta'$

Correspondientes:

$\alpha \cong \alpha'$; $\delta \cong \delta'$

$\gamma \cong \gamma'$; $\beta \cong \beta'$

Alternos Internos:

$\delta \cong \beta'$; $\gamma \cong \alpha'$

Alternos Externos:

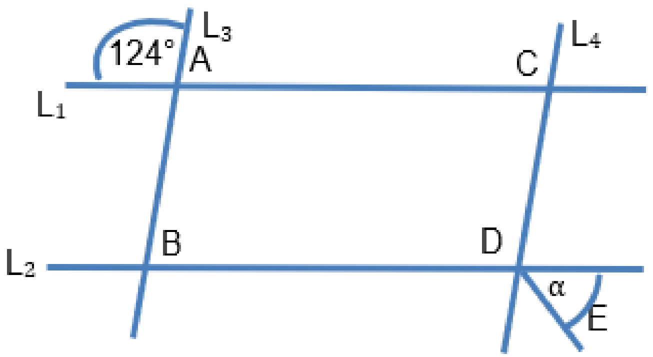
$\alpha \cong \gamma'$; $\beta \cong \delta'$

Ejercicios

En la figura 11, $L_1 \parallel L_2$, $\overline{DC} \parallel \overline{BA}$, $\overline{CD} \perp \overline{DE}$, entonces, el ángulo 2α es:

A) 40°
B) 45°
C) 50°
D) 68°
E) 30°

Figura 11



Tres ángulos contiguos suman 130°, el menor es la tercera parte del mayor, el mediano tiene 10° más que el menor. ¿Cuál es el valor de cada ángulo?

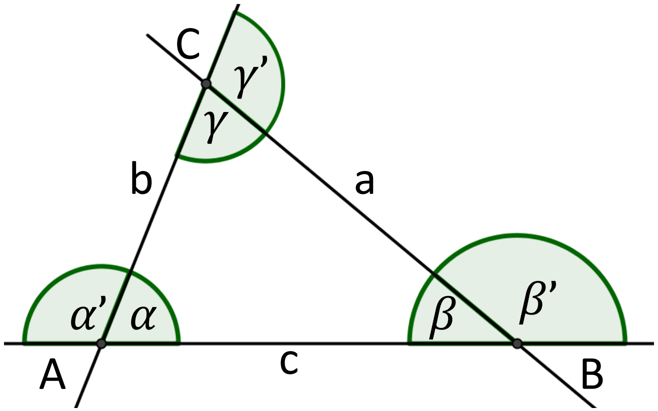
A) 34°, 44°, 102°
B) 24°, 34°, 72°
C) 24°, 44°, 62°
D) 14°, 54°, 72°
E) Ninguna de las Anteriores

TRIÁNGULOS

1) Definición:

Un triángulo ABC es la unión de tres rectas que se cortan de dos en dos.

2) **Elementos Primarios en un triángulo:**



Los puntos de intersección se denominan **vértices** del triángulo.

Los segmentos son los **lados** del triángulo. Se determinan **tres ángulos interiores** cuyos lados son los tres lados del triángulo tomados de dos en dos

Vértices: A, B y C
Lados: a, b, c.
Ángulos Interiores: $\measuredangle$CAB = α,
$\measuredangle$ABC = β, $\measuredangle$BCA= γ.
Ángulos Exteriores: α', β' y γ'.

TRIÁNGULOS

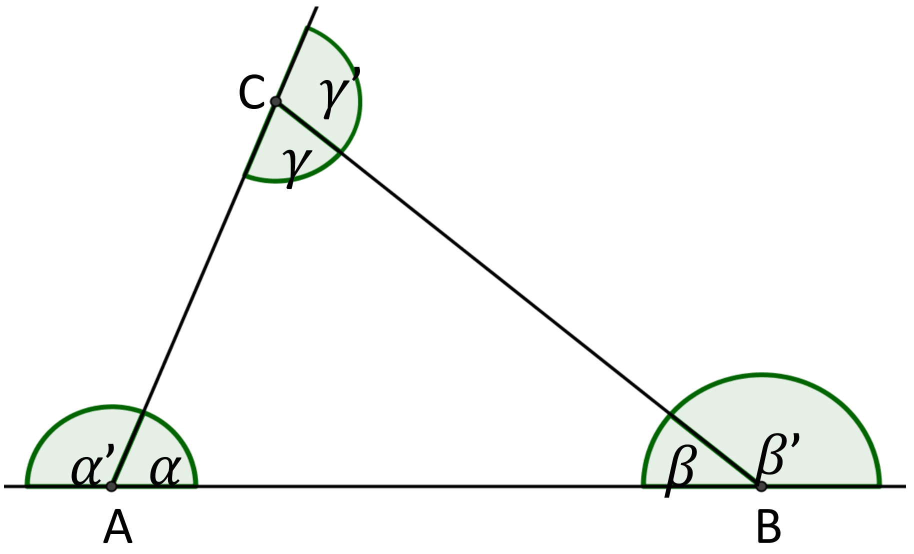
Teoremas

1) En todo triángulo "la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180°"

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

2) En todo Triángulo "la suma de las medidas de los ángulos exteriores es 360°"

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$



TRIÁNGULOS

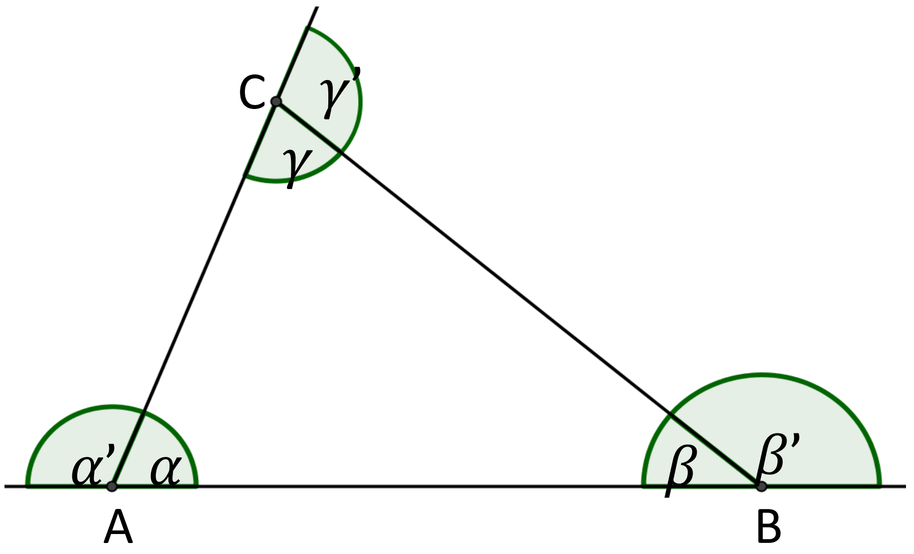
Teoremas

3) "El ángulo exterior de un triángulo tiene por medida la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él"

$$\boxed{\alpha' = \beta + \gamma}$$

$$\boxed{\beta' = \alpha + \gamma}$$

$$\boxed{\gamma' = \alpha + \beta}$$

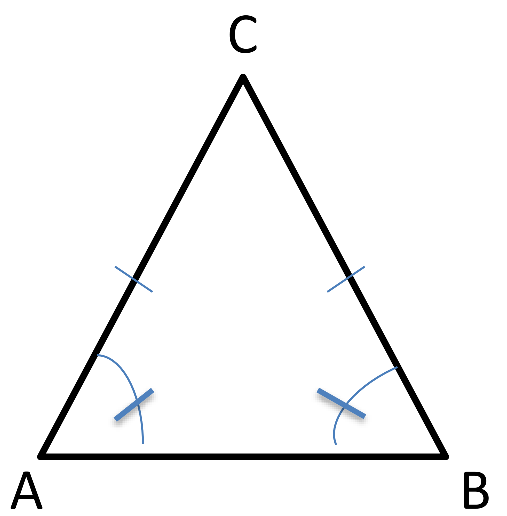


TRIÁNGULOS

Teoremas

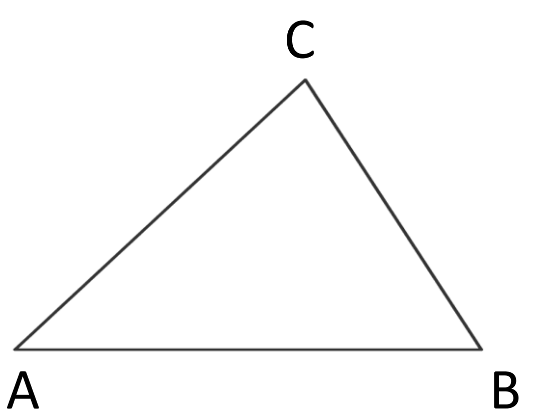
4) “Si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces tiene dos ángulos congruentes”

Si AC ≅ BC ⇒ ∡CAB ≅ ∡ABC



5) “En un triángulo el lado de mayor medida se opone al ángulo de mayor medida”

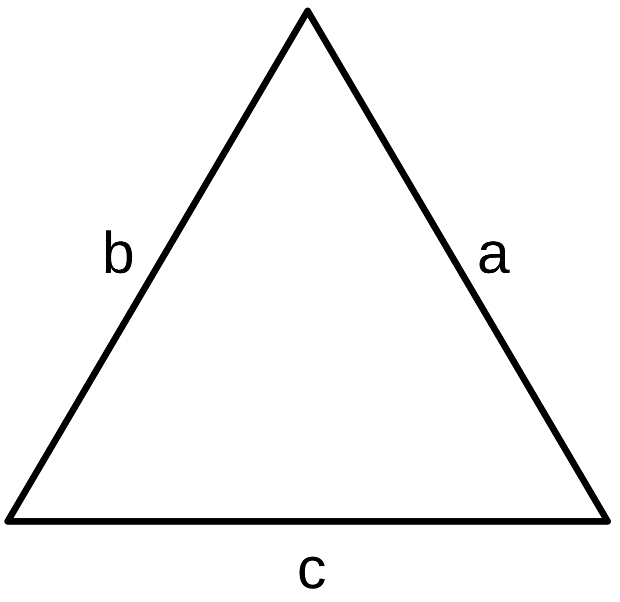
Si AC > BC ⇒ ∡CBA > ∡BAC



TRIÁNGULOS

Teoremas

6) “En todo triángulo la medida de uno de sus lados es mayor que la diferencia y menor que la suma de las medidas de los otros dos lados”



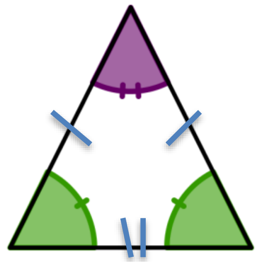
$$|c - b| < a < c + b$$
$$|c - a| < b < c + a$$
$$|a - b| < c < a + b$$

TRIÁNGULOS

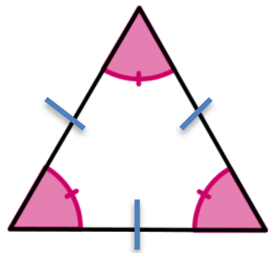
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

1) **Según sus lados:**

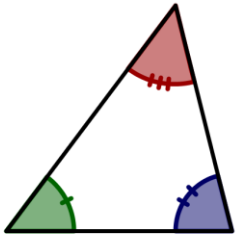
a) **Triángulo Isósceles:** Dos lados congruentes y el tercer lado de distinta medida (llamado base). Por tanto, dos de sus ángulos interiores tienen igual medida (llamados ángulos basales)



b) **Triángulo Equilátero:** Tres lados congruentes, tres ángulos interiores congruentes (60° cada uno)



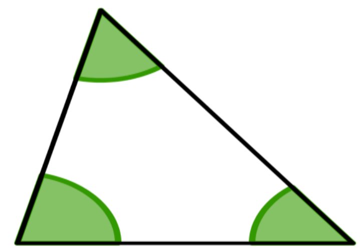
c) **Triángulo Escaleno:** Tres lados y tres ángulos interiores tienen distinta medida



TRIÁNGULOS

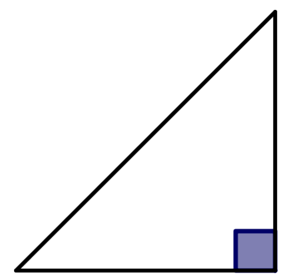
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

2) Según sus ángulos



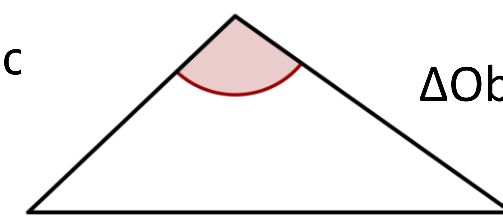
ΔAcutángulo

a) **Triángulo Acutángulo:** Sus tres ángulos interiores agudos.



ΔRectángulo

b) **Triángulos Rectángulo:** Un ángulo recto.



ΔObtusángulo

c) **Triángulos Obtusángulo:** Un ángulo interic obtuso.

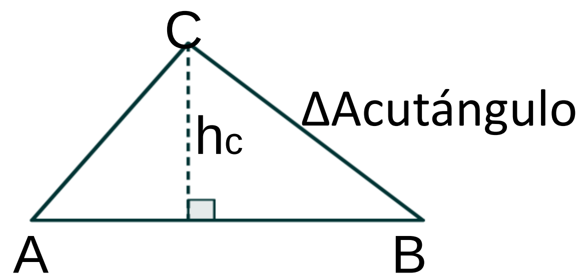
TRIÁNGULOS

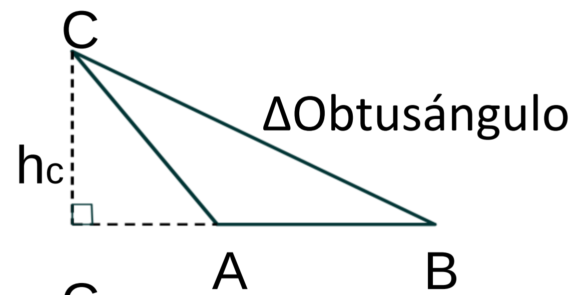
ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

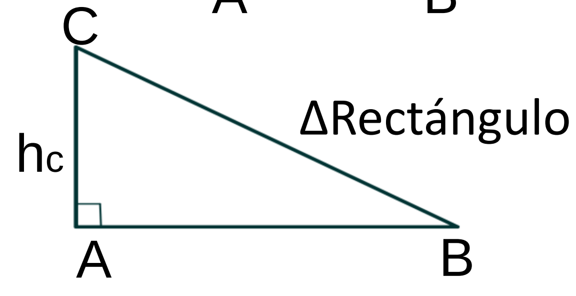
1) Rectas Notables

a) Altura: Es la recta que nace de un vértice e intersecta al lado opuesto o a su prolongación formando con éste un ángulo recto.

Observación: Las tres alturas de un triángulo se intersectan en un mismo punto, llamado ***Ortocentro***, este punto puede quedar dentro, fuera o en el triángulo mismo.



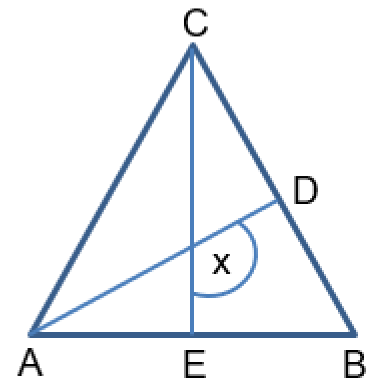




En la figura 19, $\overline{CE}$ es altura, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\measuredangle BAC = 70°$. ¿Cuál es el valor del $\measuredangle x$?

A) 110°
B) 115°
C) 125°
D) 20°
E) 40°

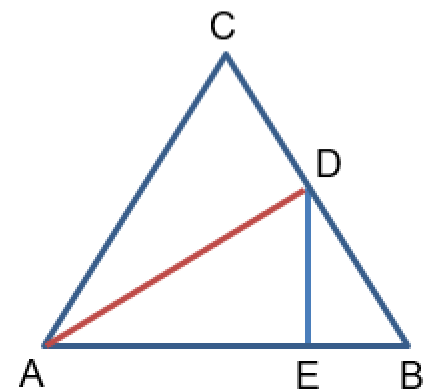
Figura 19



En la figura 20, el ΔABC es equilátero, ΔABD rectángulo en D y $\overline{DE}$ es su altura. ¿Cuánto mide el $\measuredangle ADE$?

A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 45°

Figura 20



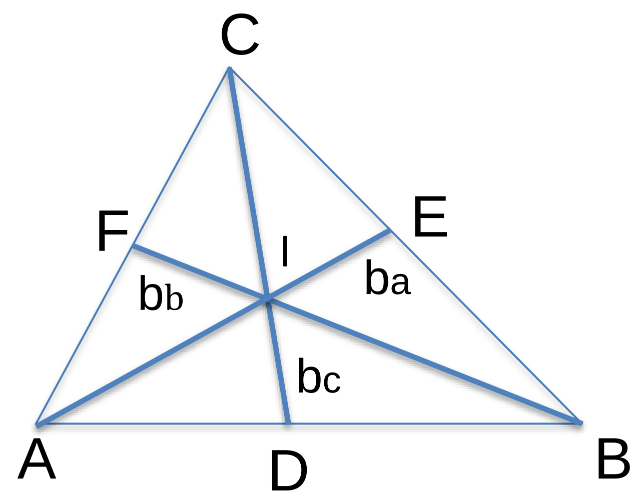
TRIÁNGULOS

ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

1) Rectas Notables

b) Bisectriz: Es el rayo que sale de un vértice del triángulo y divide al ángulo interior en dos.

Observación: Las tres bisectrices se intersectan en un mismo punto llamado ***Incentro***, el cual corresponde al centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.



bγ es bisectriz del $\measuredangle ACB \Rightarrow \measuredangle ACD \cong \measuredangle DCB$

bα es bisectriz del $\measuredangle BAC \Rightarrow \measuredangle BAE \cong \measuredangle EAC$

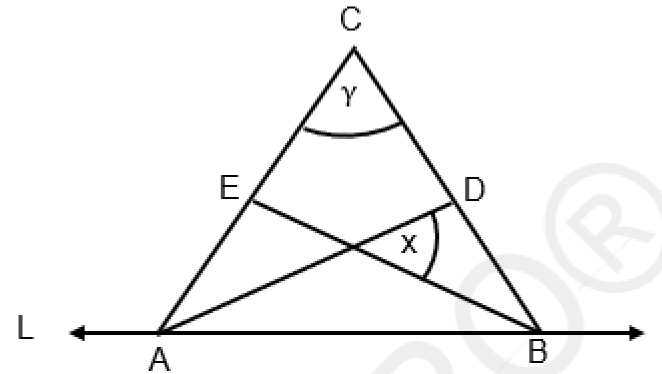
bβ es bisectriz del $\measuredangle ABC \Rightarrow \measuredangle FBA \cong \measuredangle CBF$

Ejercicio

En el ΔABC de la figura 12, AD y BE bisectrices de los $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle ABC$ respectivamente. Si $\gamma = 40°$, entonces, $\measuredangle x$ mide:

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) Ninguna de las Anteriores

Figura 12



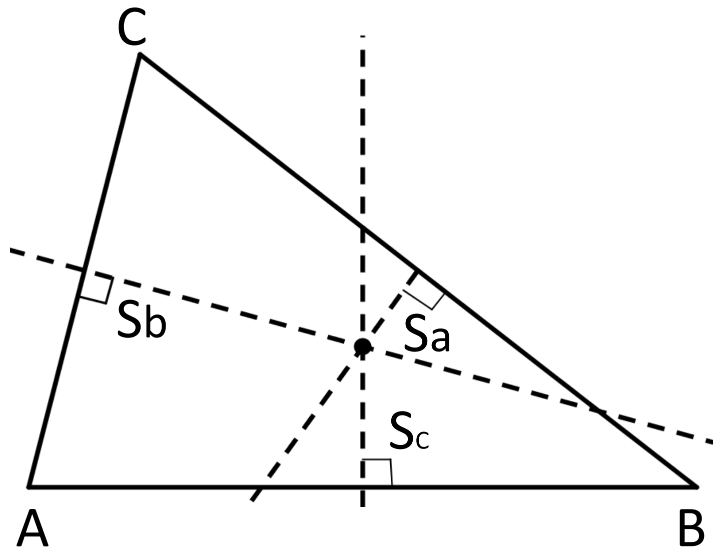
TRIÁNGULOS

ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

1) Rectas Notables

c) Simetral o Mediatriz: Es la recta perpendicular al lado del triángulo, levantada desde el punto medio del lado. Las simetrales, por lo general, no pasan por el vértice del triángulo.

Observación: Las tres simetrales se intersectan en un mismo punto llamado ***Circunscentro***, el cual corresponde al centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.



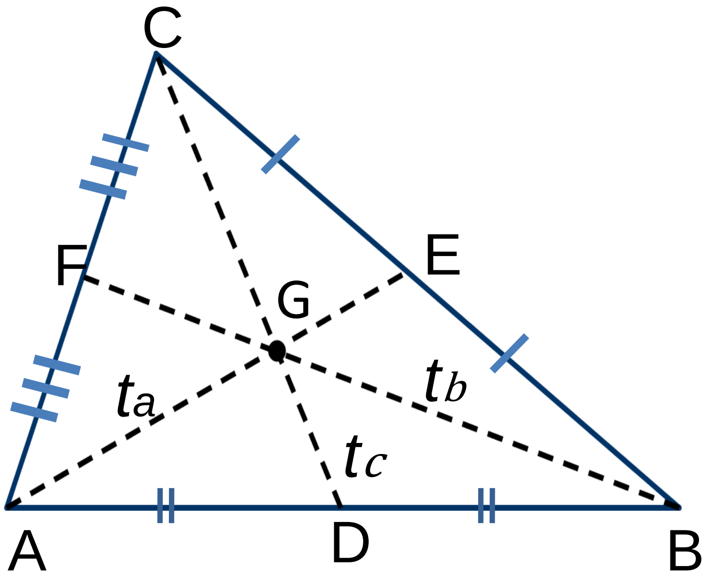
S_a : Simetral
S_b : Simetral
S_c: Simetral

TRIÁNGULOS

ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

1) Rectas Notables

d) Transversal de Gravedad: Es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.



ta, tb y tc son transversales de gravedad, entonces BE ≅ EC; AF ≅ FC; AD ≅ DB

D, E y F puntos medios de AB, BC y AC respectivamente

$$\frac{AG}{GE} = \frac{BG}{GF} = \frac{CG}{GD} = \frac{2}{1}$$

AG = 2GE; BG = 2GF; CG = 2GD

TRIÁNGULOS

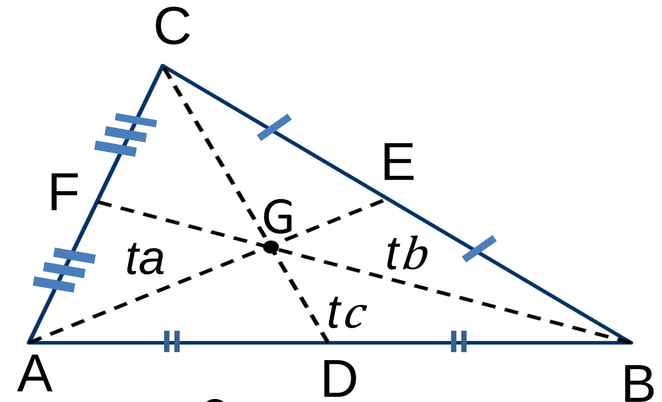
ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

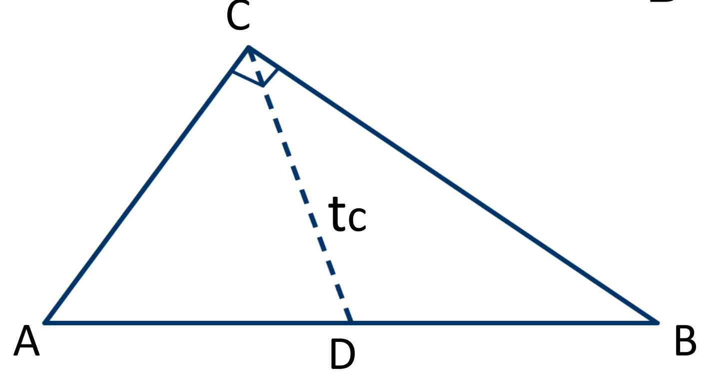
1) Rectas Notables

✓Las transversales de dividen a un triángulo cualquiera en seis triángulos equivalentes (igual área).

✓En particular, en un triángulo rectángulo, la transversal que pertenece al vértice del ángulo recto es congruente a los segmentos que divide.

Observación: Las tres transversales de gravedad se intersectan en el mismo punto llamado ***Centro de Gravedad o Baricentro.***





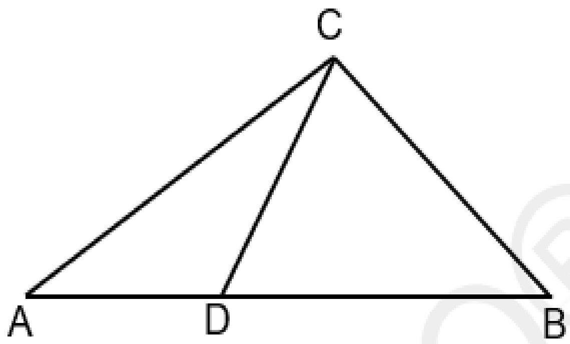
$\overline{AD} \cong \overline{DB} \cong \overline{CD}$

En la figura 10, el $\overline{AD} \cong \overline{DB} \cong \overline{DC}$ y $\measuredangle BAC = 30°$, ¿Cuál(es) de las proposiciones siguientes es(son) verdadera(s)?

I) ΔABC es rectángulo
II) ΔDBC es equilátero
III) ΔADC es obtusángulo

A) Sólo II
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

Figura 10

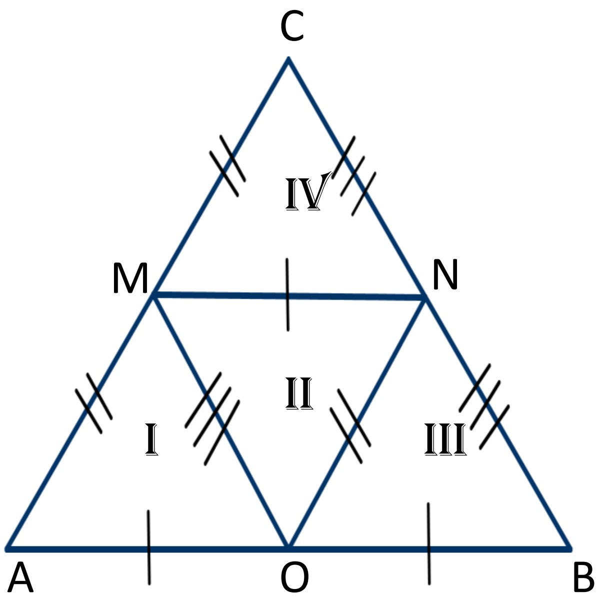


TRIÁNGULOS

ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

1) Rectas Notables

e) Medianas: Son los segmentos de rectas que se obtienen al unir los puntos medios de los lados del triángulo.



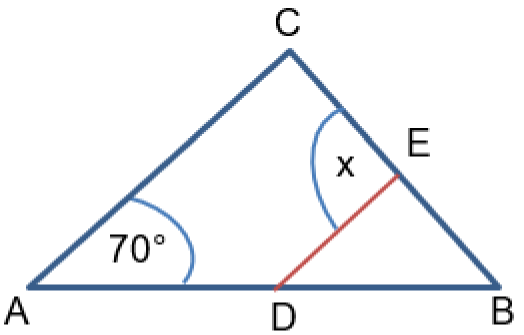
a) M, N y O puntos medios de sus lados respectivos
b) MN, MO y NO son las medianas del triángulo
c) MN // AB; ON // AC; OM // BC
d) OM ≅ BN ≅ NC; ON ≅ AM ≅ MC;
MN ≅ AO ≅ OB
e) Cuatro triángulos que se forman al trazar las tres medianas son congruentes (igual forma y tamaño)
ΔABC: ΔI ≅ ΔII ≅ ΔIII ≅ ΔIV

Ejercicio

En la figura 18, si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, D y E son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, entonces x =?

A) 120°
B) 130°
C) 140°
D) 150°
E) 160°

Figura 18

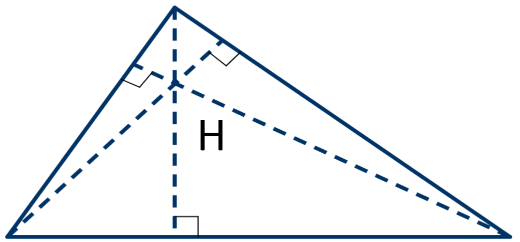


TRIÁNGULOS

ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

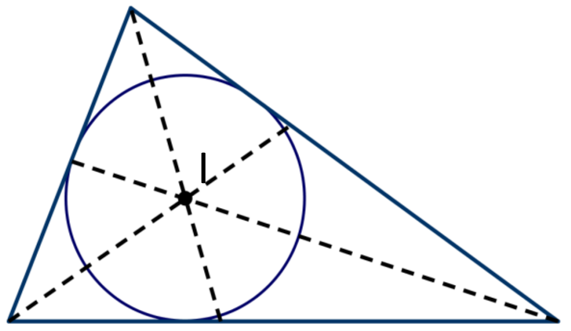
2) Puntos Notables del Triángulo

a) **Ortocentro(H):** Punto de intersección de las tres alturas de un triángulo cualquiera.



b) **Incentro(I):** Punto de intersección de las tres bisectrices de un triángulo cualquiera.

- ✓ El incentro es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.
- ✓ El incentro está siempre en el interior del triángulo.
- ✓ El incentro equidista de los tres lados del triángulo.



TRIÁNGULOS

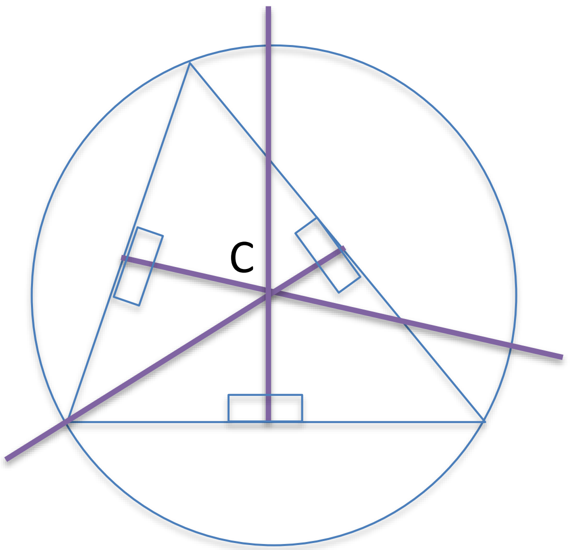
ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

2) Puntos Notables del Triángulo

c) Circuncentro(C): Punto de intersección de las tres simetrales de un triángulo cualquiera

✓ El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita en el triángulo.

✓ El circuncentro equidista de los tres vértices del triángulo



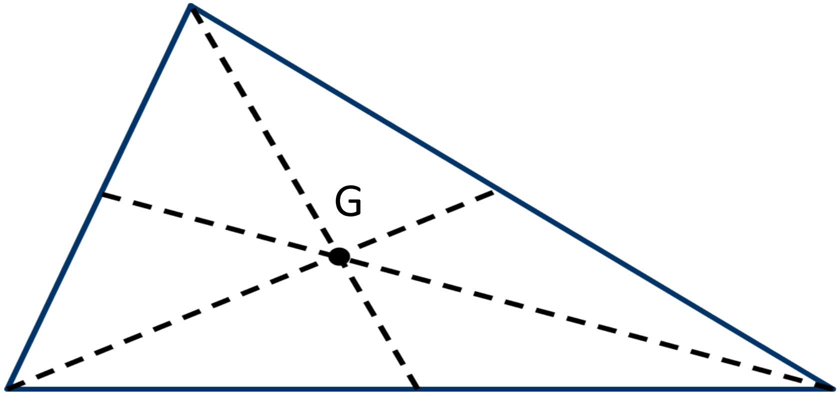
TRIÁNGULOS

ELEMENTOS SECUNDARIOS DE LOS TRIÁNGULOS

2) Puntos Notables del Triángulo

d) Centro de Gravedad o Baricentro(G):

Punto de intersección de las transversales
de gravedad de un triángulo cualquiera.



TRIÁNGULOS

PROPIEDADES PARTICULARES TRIÁNGULO EQUILÁTERO

a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$

b) Ángulos interiores igual a 60°

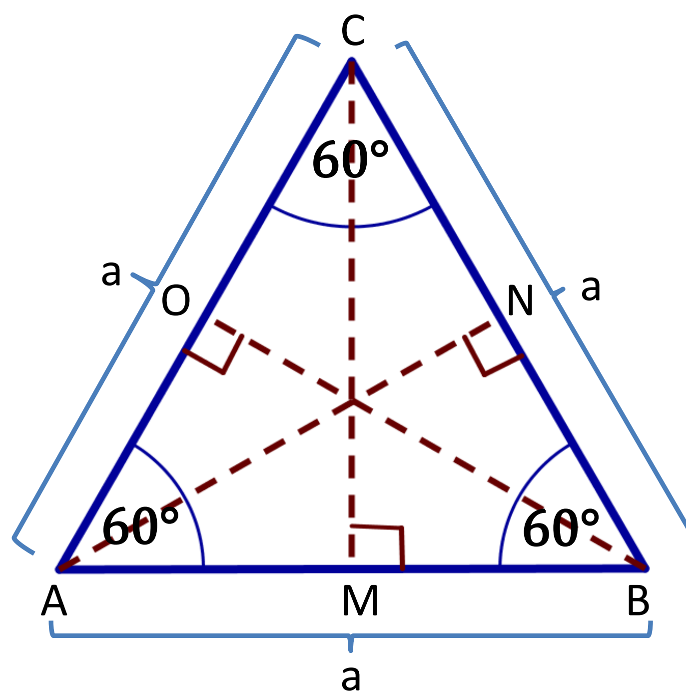
c) Alturas: $\overline{CM} \cong \overline{AN} \cong \overline{BO}$

d) Las rectas trazadas desde cada vértice son una misma recta notable:

$\overline{AN} = t_a = h_a = S_a = b_a$;

$\overline{BO} = t_b = h_b = S_b = b_b$;

$\overline{CM} = t_c = h_c = S_c = b_c$



e) M, N y O son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente;

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$; $\overline{BN} \cong \overline{NC}$ y $\overline{AO} \cong \overline{OC}$.

TRIÁNGULOS

PROPIEDADES PARTICULARES TRIÁNGULO ISÓSCELES

a) $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ lados iguales; $\overline{AB} = c$ lado distinto

b) γ: Ángulo distinto perteneciente al vértice C

c) Las rectas notables trazadas desde el vértice C son una misma recta:

$$\overline{CM} = tc = hc = Sc = b_c$$

d) Las rectas notables que nacen desde los vértices A y B, son congruentes entre si:

$$b_a \cong b_b;$$
$$ta \cong tb;$$
$$Sa \cong Sb;$$
$$\overline{AN} = \overline{BO} = ha = hb$$

e) M punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{AM} \cong \overline{MB}$;