

FUTURO

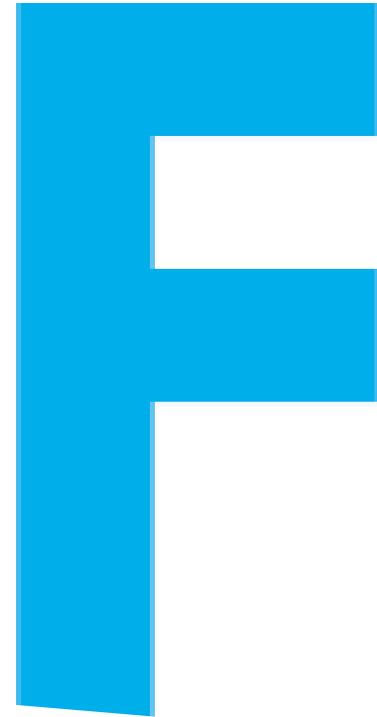
Preuniversitario

Matemática II

Circunferencia

Departamento de Matemática

Preuniversitario Futuro



Aprendizaje Esperado

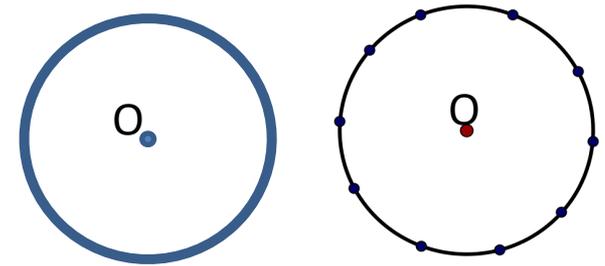
Conocer y reconocer las propiedades de la circunferencia

F

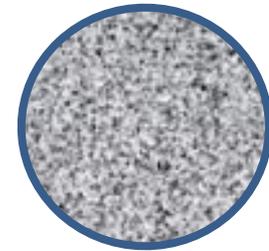
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1) Definiciones:

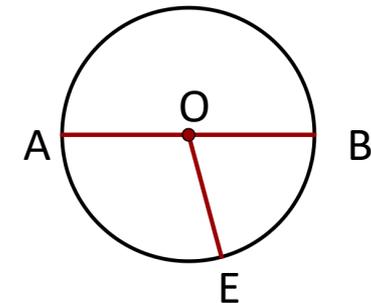
a. **Circunferencia:** Es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (O).



b. **Círculo:** Es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de todos los puntos interiores a ella.



c. **Radio (r):** Es el trazo que une el centro de la circunferencia con cualquier otro punto de ella. Es la distancia desde el centro de la circunferencia con cualquier otro punto de ella



$$\overline{OB} = \overline{AO} = \overline{OE} = r$$

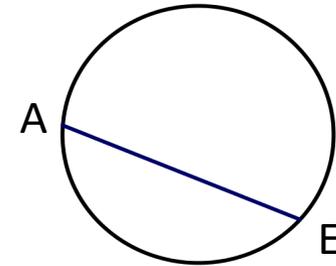
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1) Definiciones:

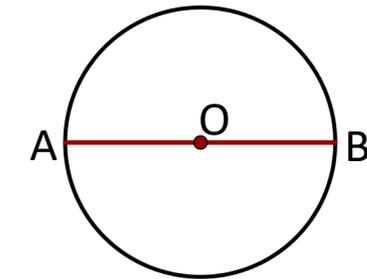
d. **Cuerda:** Es el trazo que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia.

—
AE: Cuerda



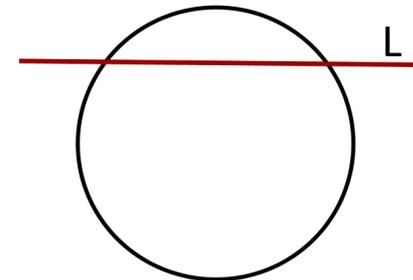
e. **Diámetro:** Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

—
AB: Diámetro



f. **Recta Secante:** Es la recta que intersecta la circunferencia en dos puntos.

L : Recta Secante



F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1) Definiciones:

- g. **Recta tangente:** Es la recta que intersecta la circunferencia en un solo punto.

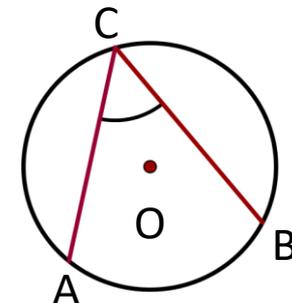
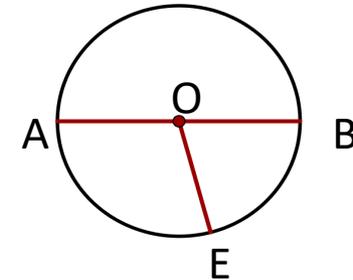
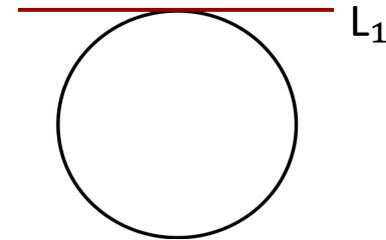
L_1 : Recta Tangente

- h. **Ángulo del Centro:** Es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios de ella.

Ángulo del centro: $\sphericalangle AOE$; $\sphericalangle EOB$; $\sphericalangle BOA$

- h. **Ángulo Inscrito:** Es el aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

Ángulo inscrito: $\sphericalangle ACB$



F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1) Definiciones:

- j. **Ángulo Semi-Inscrito:** Es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son una tangente y una secante.

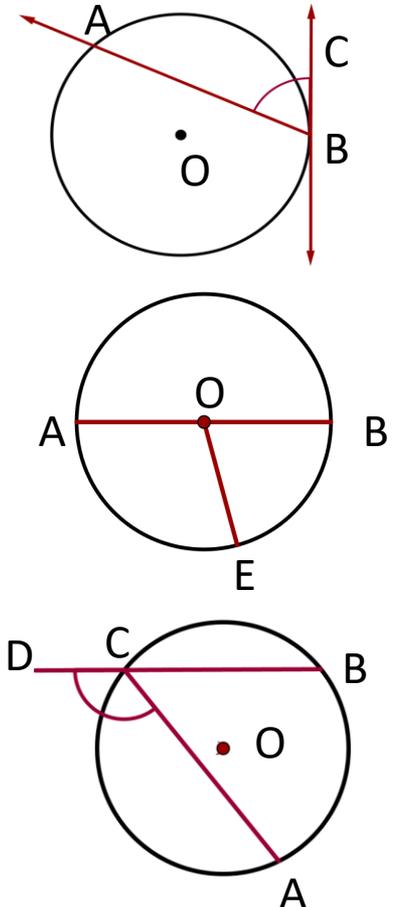
$\sphericalangle CBA$: Ángulo Semi-Inscrito

- k. **Arco:** Parte de la circunferencia.

\widehat{BA} : Arco \widehat{AE} : Arco \widehat{EB} : Arco

- l. **Ángulo ex-inscrito:** Es el ángulo adyacente a un ángulo inscrito.

$\sphericalangle DCA$: Ángulo ex-inscrito



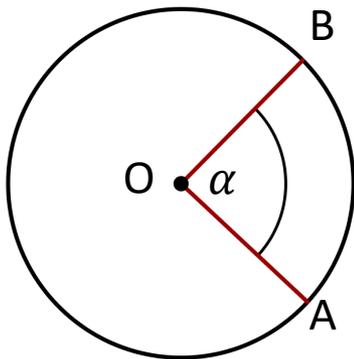
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

2) Medición de Arcos

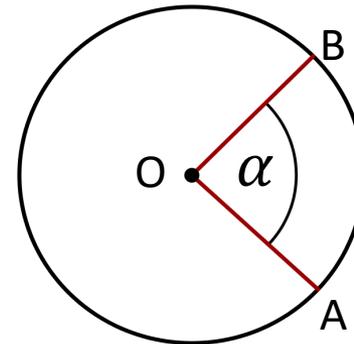
Los arcos en una circunferencia se leen en sentido contrario a los punteros del reloj y para medir el arco de una circunferencia existen dos métodos.

a) En **Grados Sexagesimales**: El arco mide lo mismo que el ángulo del centro que subtiende.



$$\widehat{AB} = \sphericalangle AOB = \alpha$$

b) En **Unidades de Longitud**: Se mide la longitud del arco desde A a B



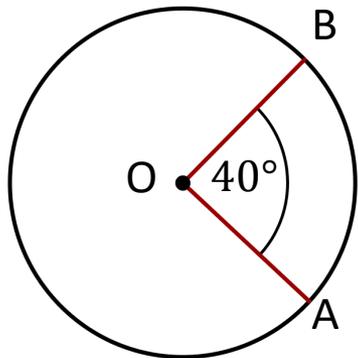
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\widehat{AB}}{2\pi r}$$

$$\widehat{AB} = \frac{\alpha \pi r}{180^\circ}$$

F

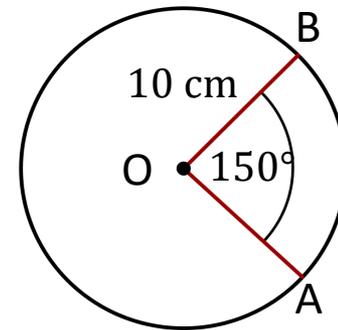
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Ejemplo 1: O es el centro de la circunferencia y el arco AB mide 40° ¿cuánto mide el ángulo del centro AOB?



$$\widehat{AB} = \sphericalangle AOB = 40^\circ$$

Ejemplo 2: O es el centro de la circunferencia, el radio de la circunferencia mide 10 cm y su ángulo del centro AOB mide 150° ¿cuánto mide el la longitud del arco AB?



$$\widehat{AB} = \frac{\alpha \pi r}{180^\circ}$$

$$\widehat{AB} = \frac{150^\circ \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm}}{180^\circ}$$

$$\widehat{AB} = \frac{25\pi \text{ cm}}{3}$$

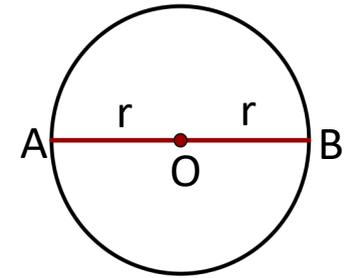
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3) Propiedades de las Cuerdas:

3.1) Teorema 1: El diámetro es la mayor cuerda de toda la circunferencia.

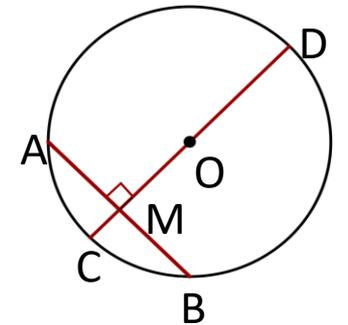
$$\overline{AB}: \text{Cuerda} \quad \overline{AB} = 2r$$



3.2) Teorema 2: Todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.

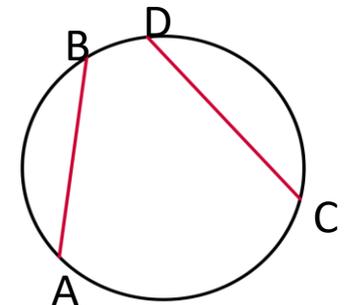
$$\overline{CD} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{MB}$$

$$\overline{OM} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{MB} \quad \overline{OC}: \text{Radio}$$



3.3) Teorema 3: En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes a cuerdas congruentes le corresponden arcos congruentes.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow \widehat{BA} \cong \widehat{CD}$$



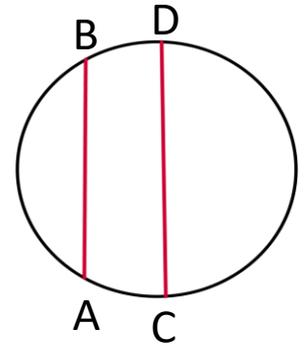
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3) Propiedades de las Cuerdas:

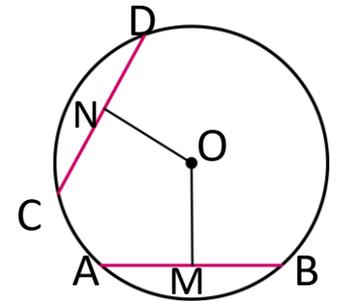
3.4) Teorema 4: En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, a mayor cuerda corresponde mayor arco.

$$\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow \widehat{BA} < \widehat{CD}$$



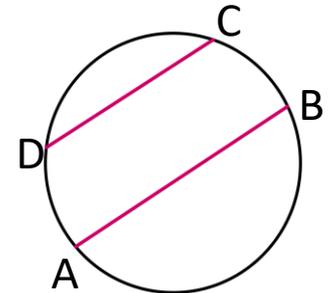
3.5) Teorema 5: En circunferencia o en circunferencia congruentes, cuerdas congruentes equidistan

$$\text{Si } \overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{OM} \cong \overline{ON}$$



3.6) Teorema 6: En toda circunferencia, cuerdas paralelas determinan arcos congruentes.

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Leftrightarrow \widehat{DA} \cong \widehat{BC}$$



F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

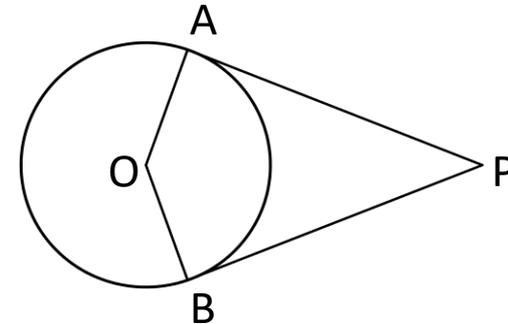
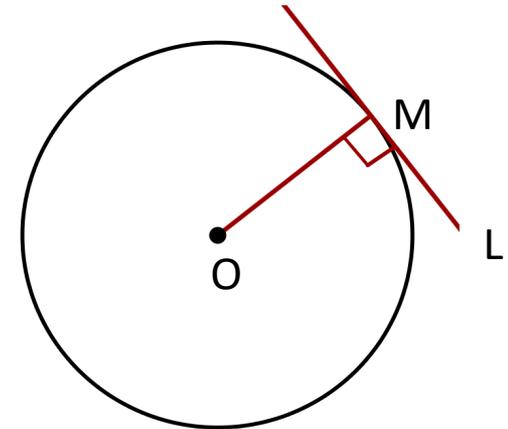
3) Propiedades de las Cuerdas:

3.7) Teorema 7: Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio cuyo extremo es el punto de contacto.

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

$$L \text{ recta tangente } L \cap \overline{OM} = M \Rightarrow L \perp \overline{OM}$$

3.8) Teorema 8: Las rectas tangentes trazadas a una circunferencia desde un mismo punto exterior son congruentes. Si AP y BP son tangentes a la circunferencia, entonces, $AP \cong BP$.

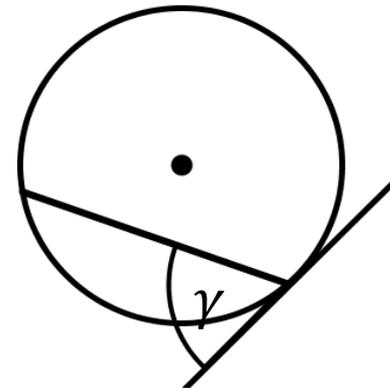
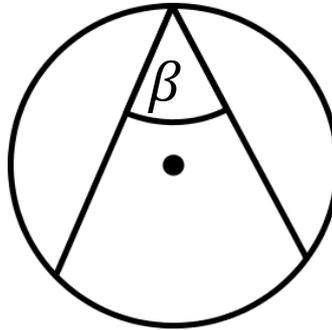
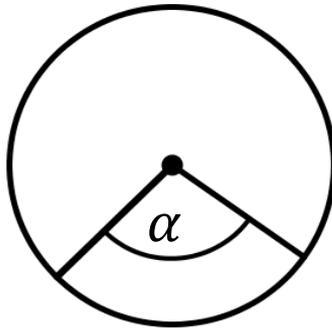


F

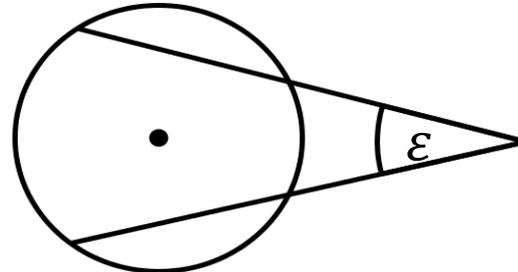
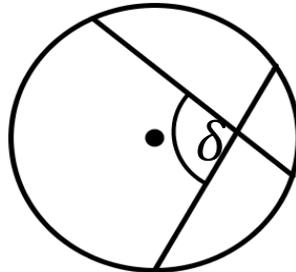
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

4) Ángulos en una Circunferencia

- 1) Ángulo del centro 2) Ángulo inscrito 3) Ángulo Semi-inscrito



- 4) Ángulo Interior 5) ángulo Exterior



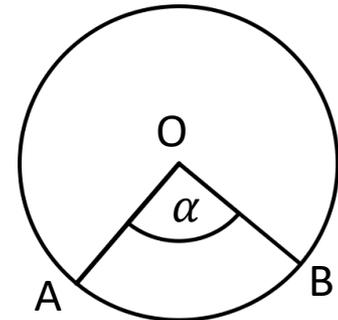
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5) Propiedades de los Ángulos: Teoremas

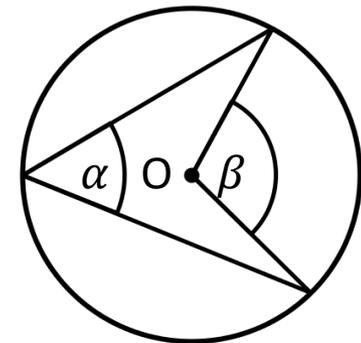
5.1) Teorema 1: La medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.

$$\sphericalangle \alpha = \overset{\frown}{AB}$$



5.2) Teorema 2: La medida de todo ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

$$\sphericalangle \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle \beta$$



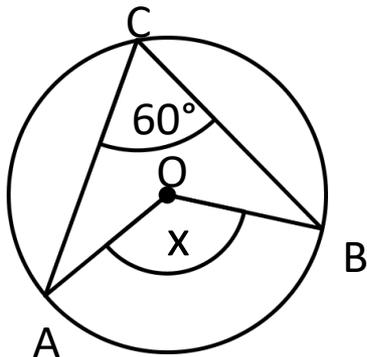
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Ejemplos:

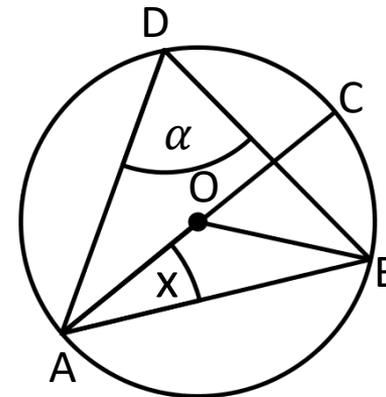
1) ¿Cuánto mide $\angle x$?

- A) 10°
- B) 30°
- C) 60°
- D) 120°
- E) 150°



2) En la circunferencia de centro O, AC diámetro entonces $\angle x$ en función de $\angle \alpha$ mide:

- A) 2α
- B) $90^\circ - \alpha$
- C) $\frac{\alpha}{2}$
- D) $180^\circ - 2\alpha$
- E) Ninguna de las Anteriores



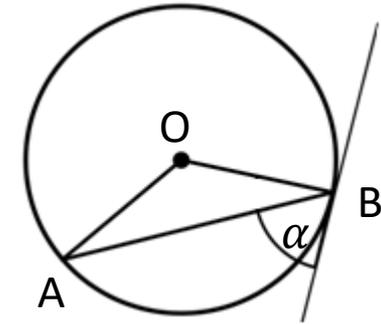
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5) Propiedades de los Ángulos: Teoremas

5.3) Teorema 3: La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

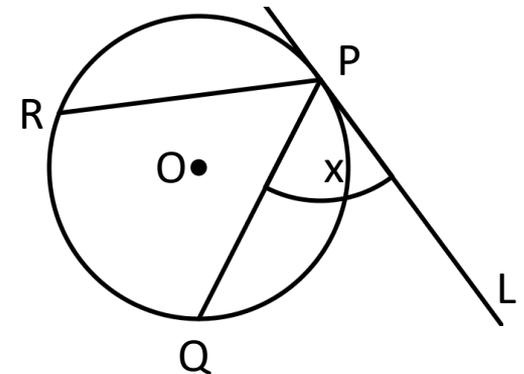
$$\sphericalangle \alpha = \frac{1}{2} \widehat{AB} \qquad \sphericalangle \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$$



Ej: Si en la circunferencia, L es tangente en P, y

$\widehat{QP} : \widehat{RQ} : \widehat{PR} = 4 : 3 : 2$, entonces la medida del $\sphericalangle x$ es:

- A) 80°
- B) 120°
- C) 160°
- D) 40°
- E) Ninguna de las Anteriores

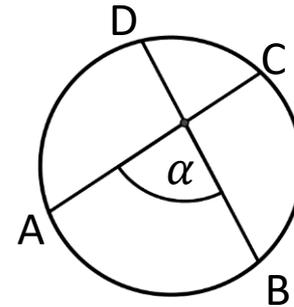


F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5) Propiedades de los Ángulos: Teoremas

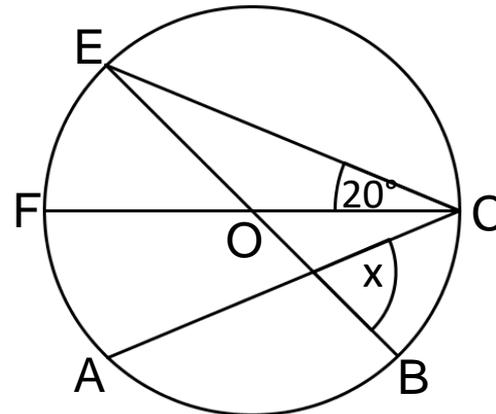
5.4) Teorema 4: La medida del ángulo interior es igual a la semi-suma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y sus prolongaciones.



$$\sphericalangle \alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

(Demre 2010) En la figura, EB y FC son diámetros de la circunferencia de centro O y CF es bisectriz del ángulo ECA. La medida de $\sphericalangle x$ es:

- A) 60°
- B) 40°
- C) 80°
- D) 90°
- E) 120°



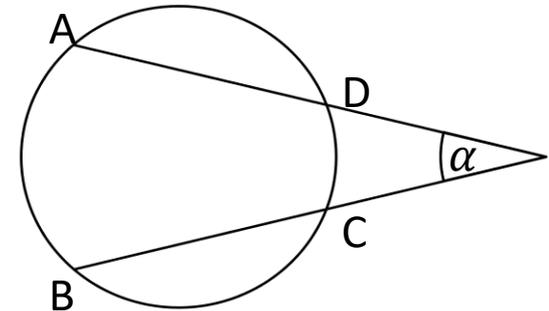
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5) Propiedades de los Ángulos: Teoremas

5.5) Teorema 5: La medida del ángulo exterior es igual a la semi-diferencia de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados.

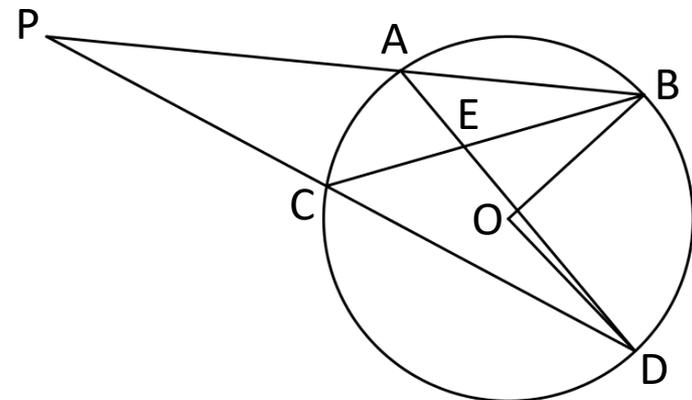
$$\sphericalangle \alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$



(Demre 2011) En la Figura, la secante PB intersecta a la circunferencia de centro O en los puntos A y B, y la secante PD la intersecta en los puntos C y D. los segmentos AD y CB se intersectan en E, $\sphericalangle AEC = 45^\circ$ y $\sphericalangle APC = 40^\circ$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $\sphericalangle BOD = 85^\circ$
- II) $\sphericalangle ABC = 2,5^\circ$
- III) $\sphericalangle BCD = 42,5^\circ$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y II
- D) Sólo I y III
- E) I, II y III

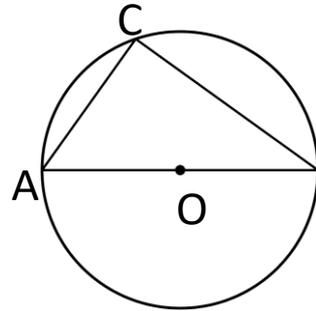


F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5) Propiedades de los Ángulos: Teoremas

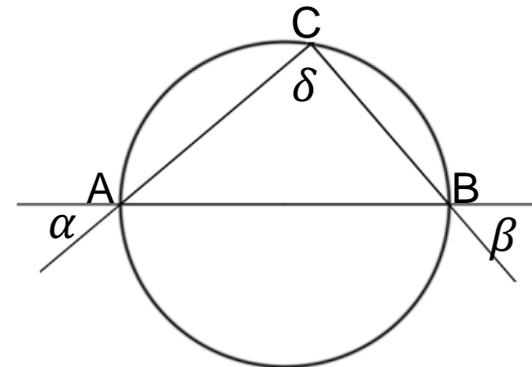
5.6) **Teorema 6:** Si un ángulo subtende un semicircunferencia, entonces es recto.



Si \overline{AB} es diámetro $\Leftrightarrow \sphericalangle ACB = 90^\circ$

(Demre 2010) En la figura, BC y CA son rectas secantes a la circunferencia, C pertenece a ella L es una recta que contiene al diámetro AB. ¿Cuál de las siguientes relaciones es **siempre** verdadera?

- A) $\alpha + \beta = \delta$
- B) $\alpha = \beta$
- C) $(\alpha + \beta) > 90^\circ$
- D) $\alpha = \beta = \delta$
- E) $\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}$

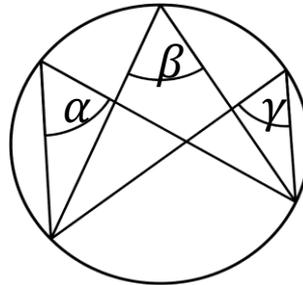


F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5) Propiedades de los Ángulos: Teoremas

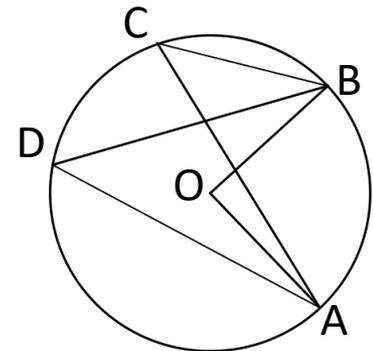
5.7) Teorema 7: Los ángulos inscritos en una circunferencia que subtenden el mismo arco son congruentes.



$$\alpha \cong \beta \cong \gamma$$

Ejemplo: En la figura, $\angle ADB = 30^\circ$, entonces $\angle AOB + \angle ACB =$

- A) 30°
- B) 60°
- C) 90°
- D) 120°
- E) 130°

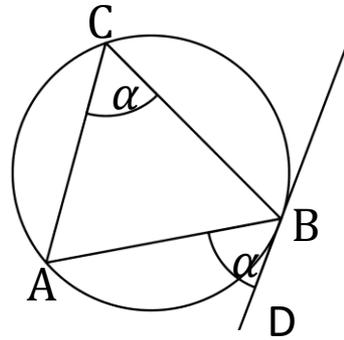


F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5) Propiedades de los Ángulos: Teoremas

5.8) Teorema 8: El ángulo semi-inscrito en una circunferencia es congruente con el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.



Ejemplo: Si en la \otimes , L es tangente en B. Si $AC \cong BC$; entonces $\sphericalangle\beta$ mide:

- A) 80°
- B) 50°
- C) 30°
- D) 20°
- E) Ninguna de las Anteriores

