FUTURO Preuniversitario

Matemática II

Transformaciones Isométricas

Departamento de Matemática

Preuniversitario Futuro

Contenidos

Matemática 1 PAES y PDT

Transformaciones isométricas

- Puntos y vectores en el plano cartesiano.
- Rotación, traslación y reflexión de figuras geométricas.
- Problemas que involucren rotación, traslación y reflexión en diversos contextos.

Matemática 2 PAES y PDT

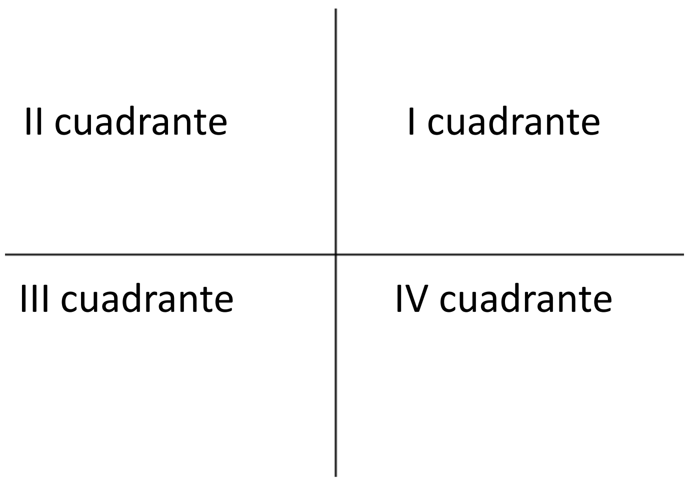
Homotecia de figuras planas

- Problemas que involucren homotecia en diversos contextos.

PLANO CARTESIANO

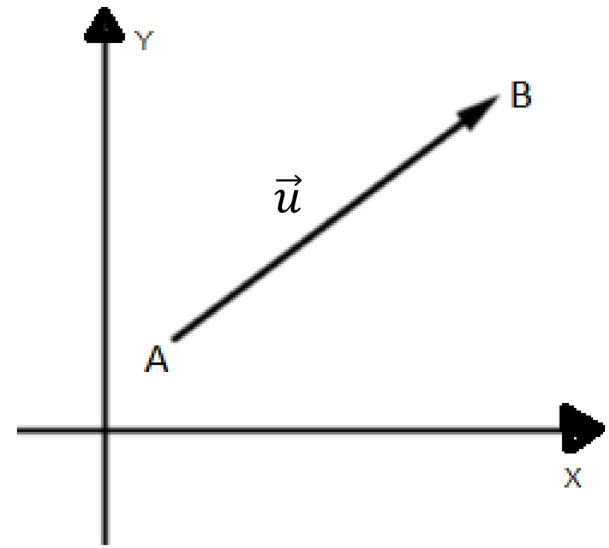
Las trasformaciones en el plano requieren de la noción de coordenadas en el sistema o plano cartesiano y el concepto de vector.

<u>PLANO CARTESIANO</u>: consta de dos rectas numéricas perpendiculares, al eje x llamado eje de las <u>abscisas</u> y el eje y llamado eje de las <u>ordenadas</u>, las que se intersectan en el origen. Los ejes dividen al plano en cuatro regiones llamados cuadrantes.



VECTOR

VECTOR: Es un segmento AB orientado, que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B. Un vector se representa gráficamente por una flecha, como lo indica la figura. Todo vector tiene módulo, dirección y sentido.



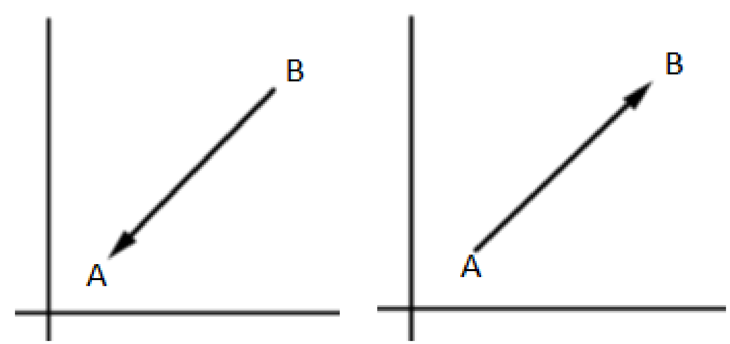
Módulo: Es la longitud del segmento AB, formado por el vector u, entonces el módulo es

$$\vec{u} = (a, b) \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dirección: Está dado por la recta que pasa por A y B

Sentido: Está dado por la orientación de la flecha

Definición Vectores Opuestos: Son aquellos dos vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuestos



VECTOR

<u>DEFINICIÓN</u>: Dos puntos en el plano definen un único vector. Si $A(x_1, y_1)$ y $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ son dos puntos en el plano, el segmento que une A con B denotado por vector.

Las coordenadas del extremo menos el origen:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ejemplo:

Sea los puntos $A(-2, 1)$ y $B(3, 5)$, entonces el vector $\overrightarrow{AB}$ es:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-2), 5 - 1)$$

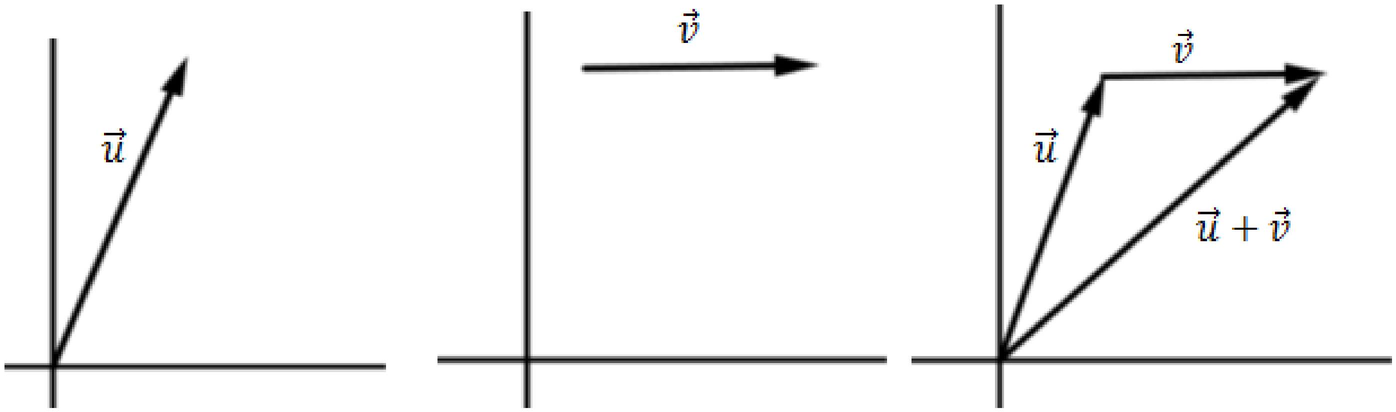
$$\overrightarrow{AB} = (5, 4)$$

VECTOR

SUMA DE LOS VECTORES

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores en el plano. La suma de estos vectores se obtiene siguiendo los siguientes pasos:

1. Copiar, a partir del extremo del primer vector, el segundo vector
2. Unir el origen del primer vector con el extremo del segundo vector
3. El vector obtenido corresponde a la suma



VECTOR

SUMA DE VECTORES

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dos vectores en el plano. Para sumar dos vectores se suman las abscisas y se suman las ordenadas

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ejemplo:

Sea los puntos $\vec{u} = (5, -3)$ y $\vec{v} = (-2,\ 5)$, entonces, al sumar los vectores se obtiene:

$$\vec{u} + \vec{v} = (5 + (-2), (-3) + 5)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 2)$$

RESTA DE VECTORES

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dos vectores en el plano. Para restar dos vectores se restan las abscisas y se restan las ordenadas

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Ejemplo:

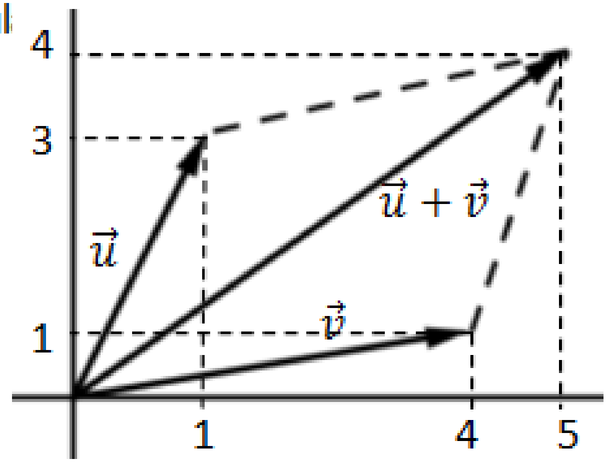
Sea los vectores $\vec{u} = (-6,\ 4)$ y $\vec{v} = (8,\ 3)$, entonces, al restar los vectores se obtiene:

$$\vec{u} - \vec{v} = (-6 - 8, 4 - 3)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (-14, 1)$$

VECTOR

<u>EJEMPLO 1</u>: Dados los vectores $\vec{u} = (1,3)$ y $\vec{v} = (4,1)$, calcul



$$\vec{u} + \vec{v} = (1,3) + (4,1) = (5,4)$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

<u>EJEMPLO 2</u>: Dados los vectores $\vec{u} = (3,-4)$ y $\vec{v} = (-4,-7)$, calcular

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

$$\vec{u} - \vec{v} =$$

$$||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| =$$

$$||\vec{u} + \vec{v}|| =$$

VECTOR

PRODUCTO ESCALAR

Sean el vector $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y k el escalar, siendo $\mathrm{k} \in IR$, tal que,

$$k\vec{u} = k(x_1, y_1) = (k \cdot x_1, k \cdot y_1)$$

Ejemplo:

Sean el vector $\vec{u} = (-6,\ 4)$ y el escalar $k = 3$, entonces, el producto escalar es:

$$3\vec{u} = (3 \cdot (-6), 3 \cdot 4)$$

$$3\vec{u} = (-18,12)$$

PRODUCTO PUNTO:

Se llama producto punto entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, al producto generado entre las coordenadas de los dos vectores entregando como resultado un escalar

Sean dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, talque,

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (-2,\ 1)$ y $\vec{v} = (3,\ 2)$, entonces, el producto punto de los vectores se obtiene:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 2$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = -6 + 2$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = -4$$

VECTOR

Observaciones:

- Dos vectores son perpendiculares si el producto punto entre los dos vectores entrega el escalar cero, es decir, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$
- Dos vectores son paralelos, si el producto escalar de uno de los vectores entrega las coordenadas del otro vector, es decir, $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

2) <u>DEFINICIÓN</u>

En una transformación geométrica es necesario tener presente los siguientes elementos

a. La figura original
b. La operación que describe el cambio
c. La figura que se obtiene después del cambio

Se llaman **transformaciones isométricas** de una figura a las transformaciones que no alteran la forma ni el tamaño de la figura sobre la que aplica, sólo pueden cambiarla de posición o sentido.

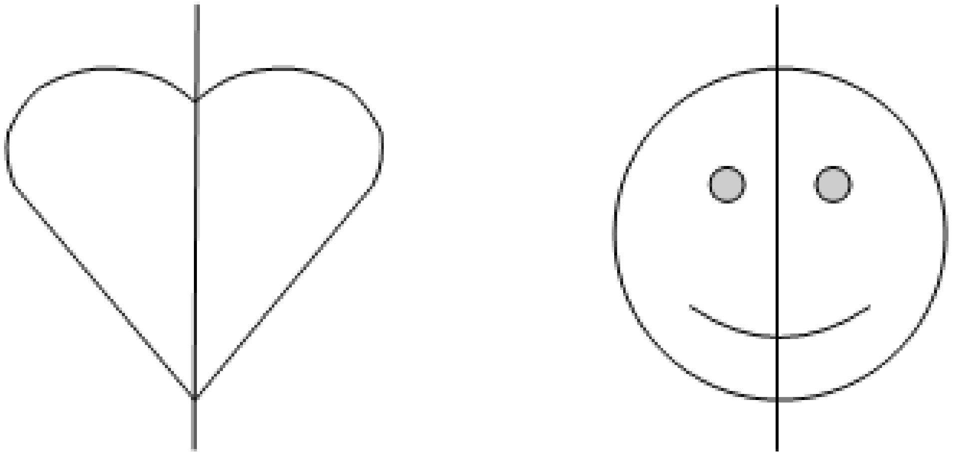
Entre las transformaciones isométricas están las **reflexiones (simétricas), traslaciones** y **rotaciones.**

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

3) CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES

a) <u>SIMETRÍA O REFLEXIÓN</u>

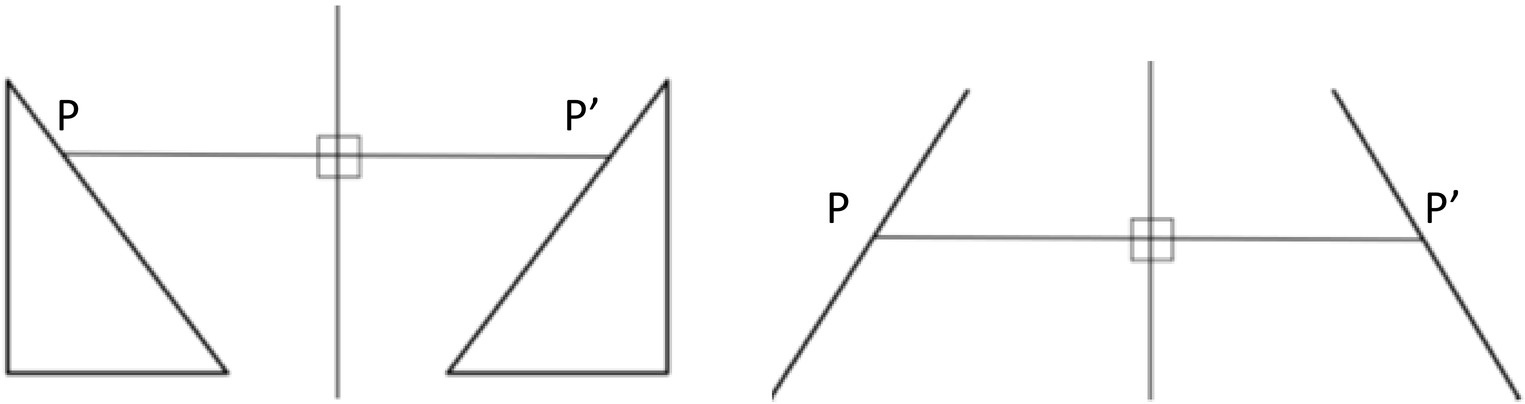
Cuando trazamos una línea por el centro de una figura de modo que lo que queda a la derecha de la línea sea igual a lo queda a su izquierda, decimos que la figura es simétrica.



TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

i) **<u>REFLEXION RESPECTO DE UN EJE</u> (SIMETRÍA AXIAL):**

Una reflexión de una figura geométrica respecto de un eje llamado eje simetría es el movimiento que transforma la figura, de manera que cada punto P y su imagen o simétrico P’ equidistan del eje de simetría y el segmento PP’ sea perpendicular al eje de simetría.

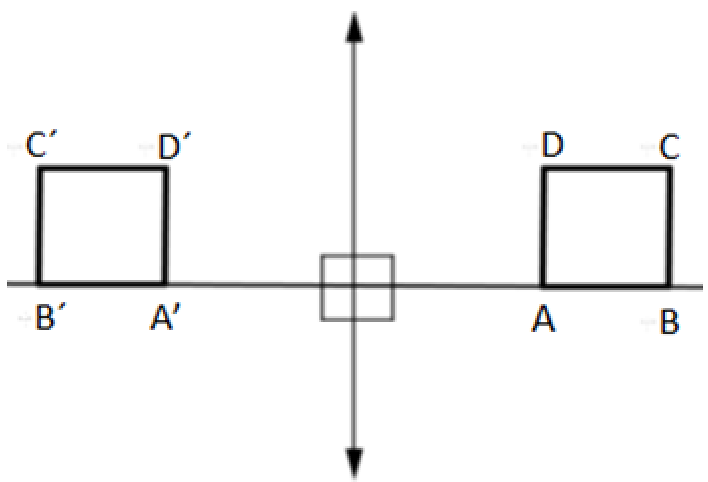


TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

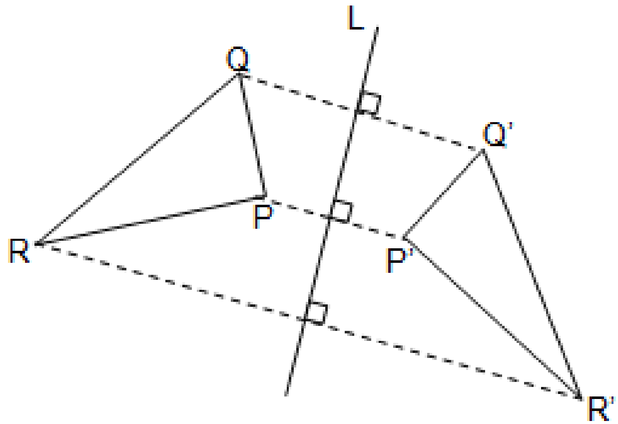
i) <u>REFLEXION RESPECTO DE UN EJE</u> (SIMETRÍA AXIAL):

Una transformación en la cual cada punto de una figura se asocia a otro punto llamado imagen que cumple con las siguientes características:

a) El punto y su imagen están a igual distancia de una línea recta llamado eje se simetría (A y A’).



b) Dada una recta fija L del plano, se llama simetría axial con respecto a L o reflexión con respecto a L, a aquella isometría tal que, si P y P’ son puntos homólogos con respecto a ella, y, además el punto medio de está en L. La recta L recibe el nombre de eje de simetría

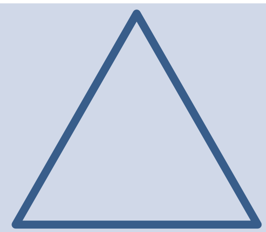
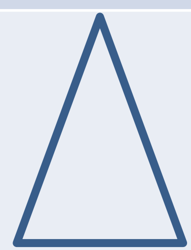
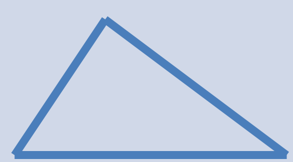


TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

i) **<u>REFLEXION RESPECTO DE UN EJE</u> (SIMETRÍA AXIAL):**

Si al aplicar una reflexión a una figura geométrica en torno a un eje ésta se mantiene “invariante”, es decir, no cambia, diremos que ése es un eje de simetría. En el caso de los triángulos, tenemos:

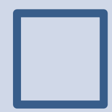
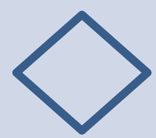
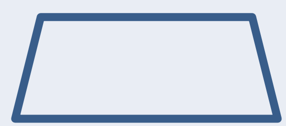
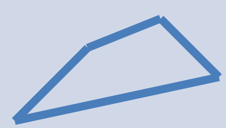
.

Tipo	Figura	Ejes
Triángulo Equilátero		Tres ejes de simetría
Triángulo Isósceles		Un eje de simetría
Triángulo Escaleno		Ningún eje de simetría

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

i) <u>REFLEXION RESPECTO DE UN EJE</u> (SIMETRÍA AXIAL):

En el caso de los cuadriláteros, tenemos:

Tipo	Figura	Ejes
Cuadrado		cuatro ejes de simetría
Rectángulo		dos eje de simetría
Rombo		dos eje de simetría
Trapecio Isósceles		Un eje de simetría
Trapezoide		Ningún eje de simetría

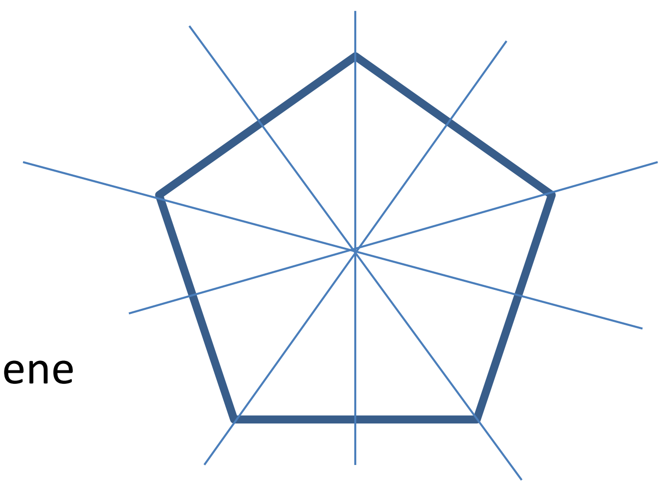
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

i) REFLEXION RESPECTO DE UN EJE (SIMETRÍA AXIAL):

El circulo tiene infinitos ejes de simetría. Cada recta que pasa por el centro es un eje de simetría del circulo.
En los polígonos regulares, estos tienen tantos ejes de simetría como número de lados.

Ejemplo: En un pentágono regular, cada recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto es un eje de simetría.
.

El pentágono regular tiene
5 ejes de simetría



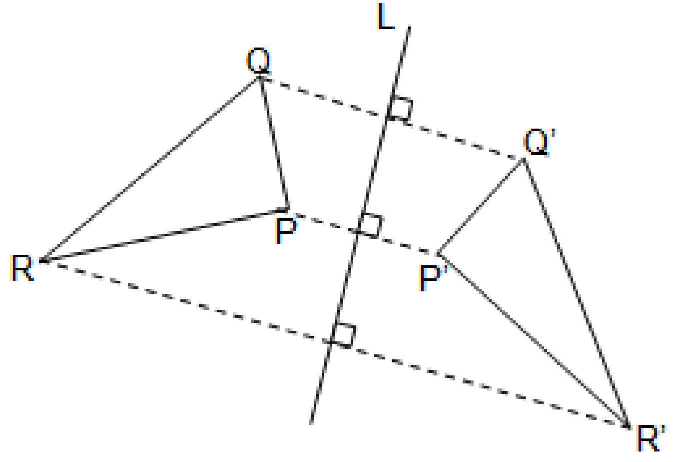
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

i) <u>REFLEXION RESPECTO DE UN EJE</u> (SIMETRÍA AXIAL):

- ✓ En una simetría axial, las figuras cambian en sentido respecto del giro de las manecillas del reloj.
- ✓ No es posible superponer, mediante traslaciones y/o rotaciones, los triángulos congruentes PQR y P'Q'R'.
- ✓ Los puntos de la recta L permanecen invariantes ante una reflexión.

Todo punto del plano cartesiano A(x, y) tiene un simétrico A(x, -y) con respecto al eje de las abscisas y un simétrico A''(-x, y) con respecto al eje de las ordenadas

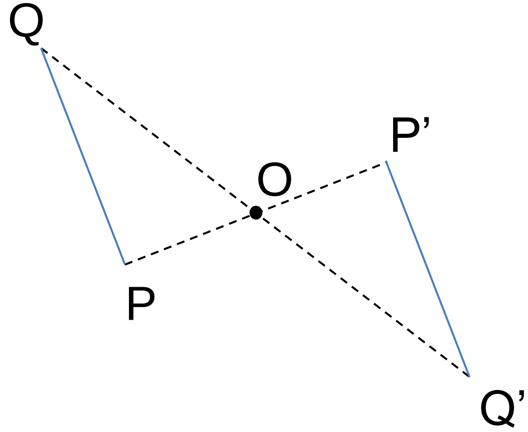
.

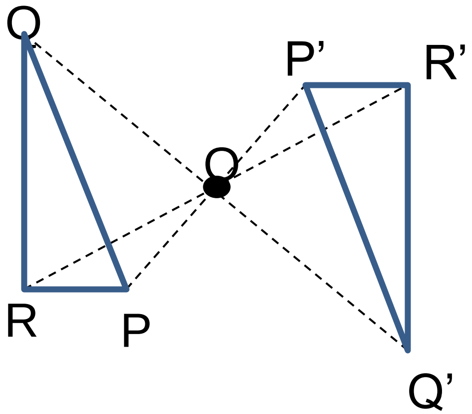


TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

ii) <u>REFLEXIÓN RESPECTO DE UN PUNTO</u> (SIMETRÍA CENTRAL):

Una reflexión de una figura geométrica respecto de un punto O es el movimiento que trasforma cada punto P de la figura original en el punto P'', de modo que O es el punto medio del segmento PP''





Sus características:

a) El punto y su imagen están a igual distancia de un punto llamado centro de simetría (P y P´)

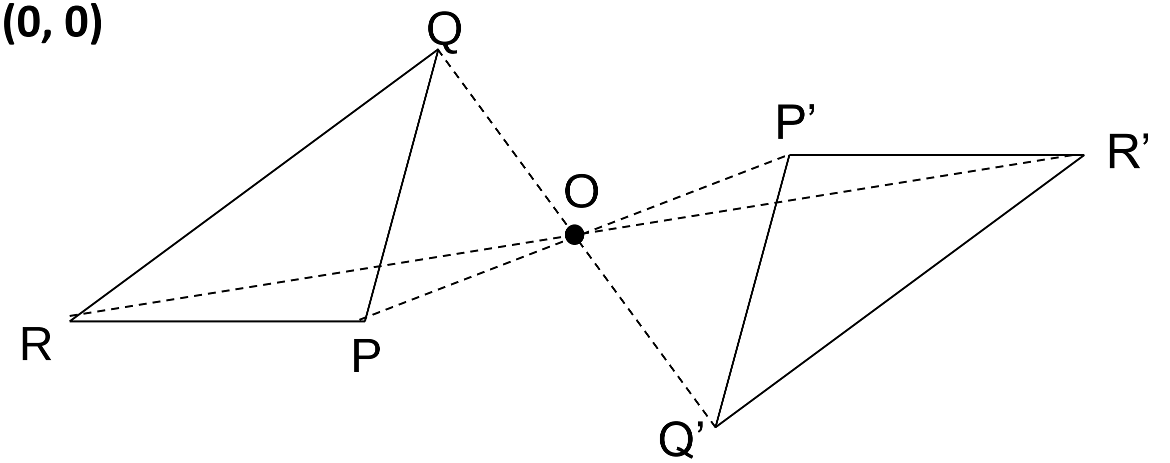
b) El punto, su imagen y el centro de simetría pertenece a una misma recta (P, O, P' son colineales)

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

ii) <u>REFLEXIÓN RESPECTO DE UN PUNTO</u> (SIMETRÍA CENTRAL):

<u>OBSERVACIONES</u>:

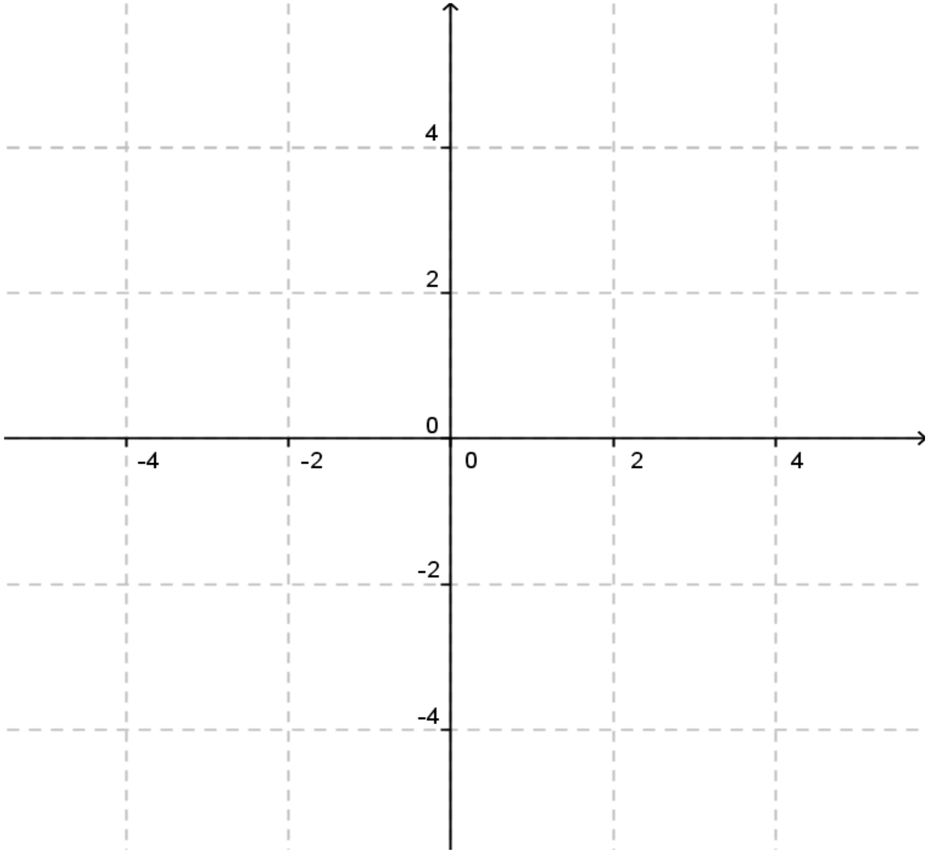
- Una simetría central respecto de un punto O equivale a una rotación de 180° de centro O.
- Los trazos de la figura original son paralelos con los trazos homólogos de la figura transformada.
- El sentido de la figura no cambia respecto al giro de las manecillas del reloj.
- Todo punto del plano cartesiano **A(x, y)** tiene su simétrico **A´(-x,-y)** con respecto al origen **O(0, 0)**



TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

EJERCICIO: Determinar el segmento simétrico al segmento que une los puntos P(1, 2) con Q(3, 3) respecto al:

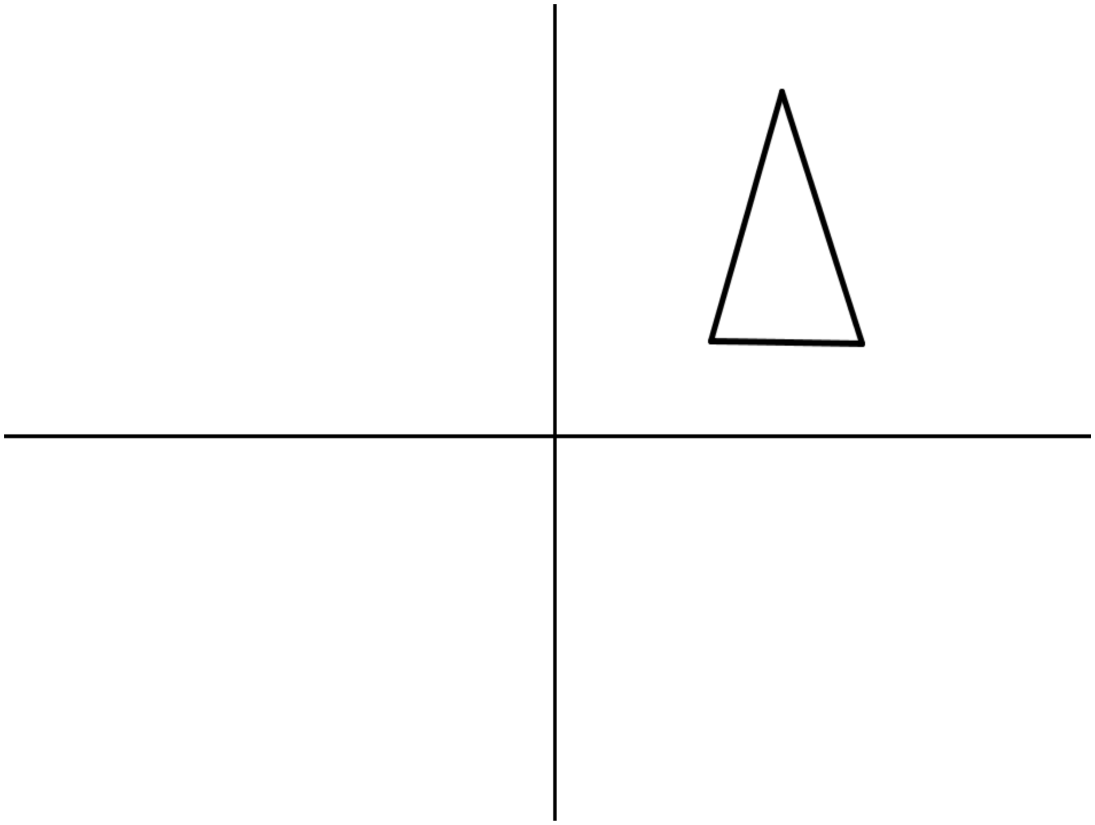
Eje x
Eje y
Origen



TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

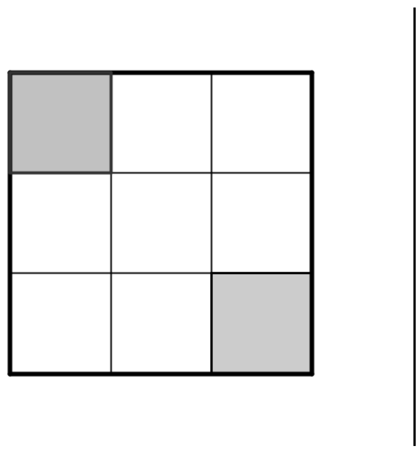
EJERCICIO 4: Determinar el triangulo simétrico dado con respecto al:

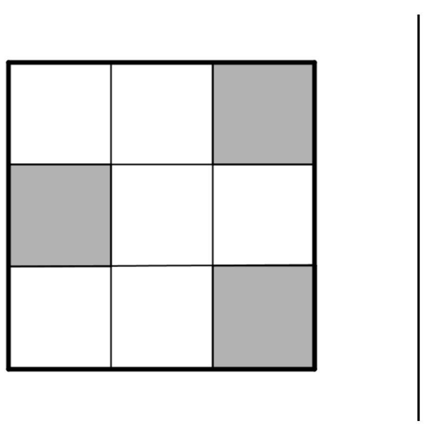
Eje x
Eje y
Origen



TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

<u>EJERCICIO 5</u>: Determinar la figura simétrica con respecto a la recta indicada:



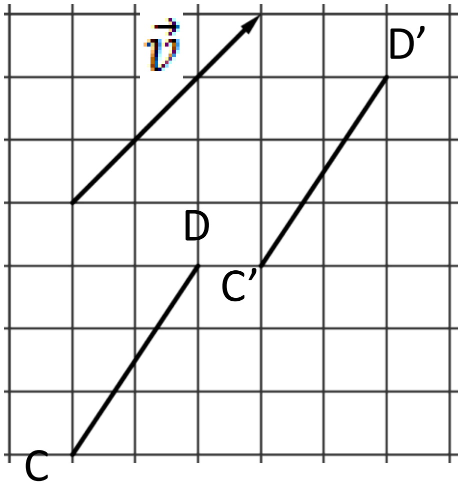


TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

b) Traslaciones:

Es una trasformación isométrica que mueve cada punto del plano de acuerdo a un vector determinado. Son aquellas isometrías que permiten desplazar en línea recta todos los puntos del plano. Este desplazamiento se realiza siguiendo una determinada *dirección, sentido y distancia*, por lo que toda traslación queda definida por lo que se llama su **“vector traslación”.**

EJEMPLO: El segmento $\overline{CD}$ se ha trasladado de acuerdo al vector $\vec{v}$.

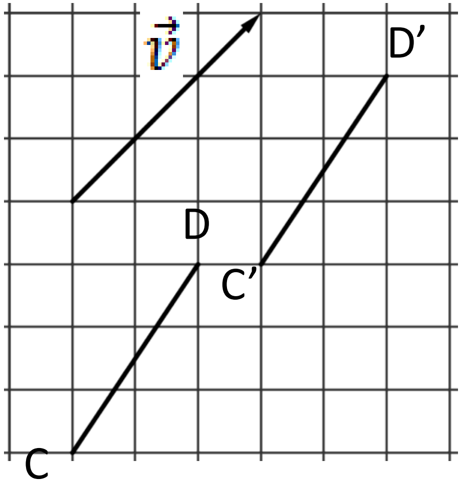


TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

b) Traslaciones:

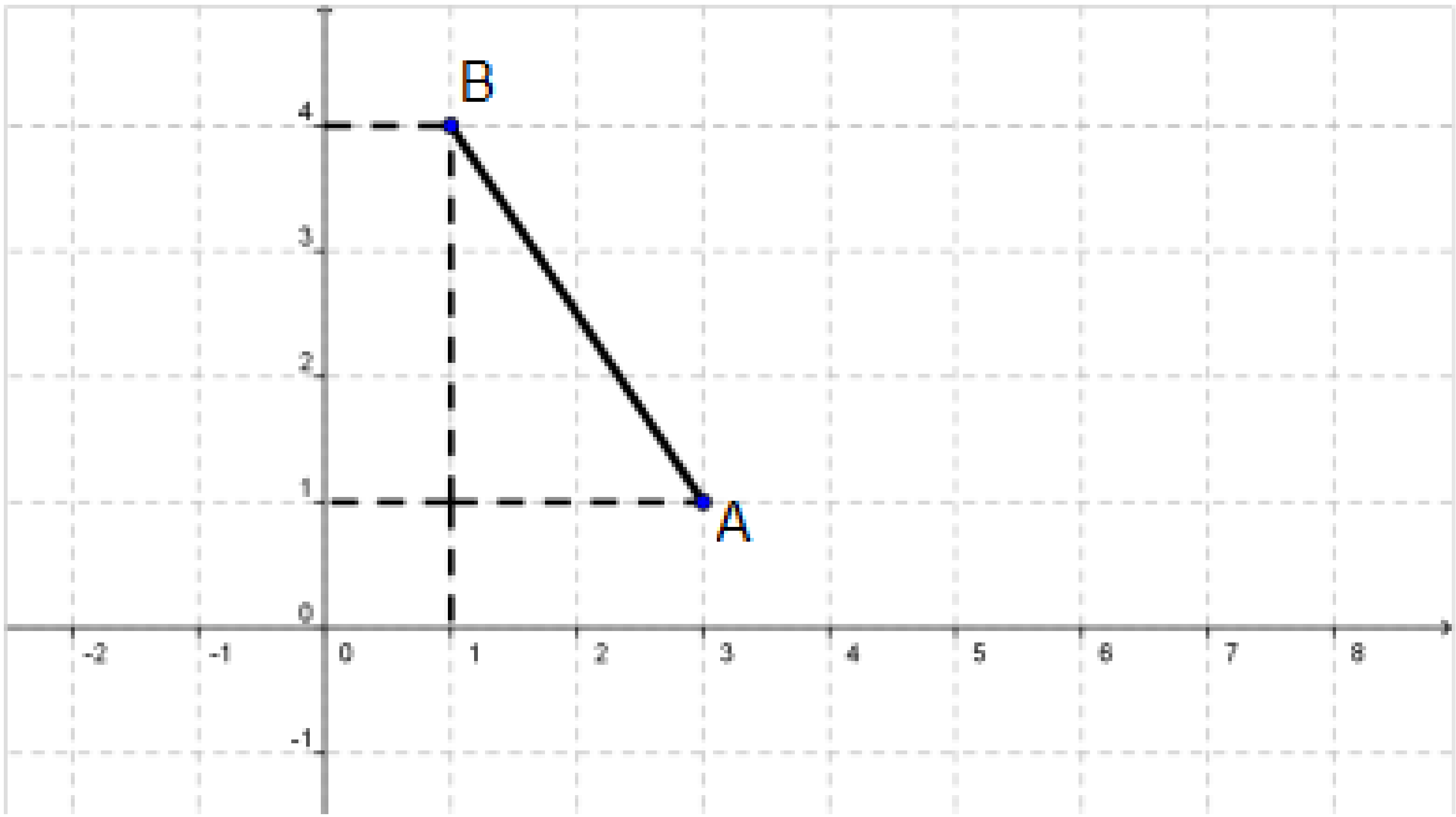
Observaciones:

- Una figura conserva todas sus dimensiones, tanto lineales como angulares.
- Una figura jamás rota; es decir el ángulo que forma con la horizontal no varía.
- No importa el número de traslaciones que se realicen, siempre es posible resumirlas en una única.



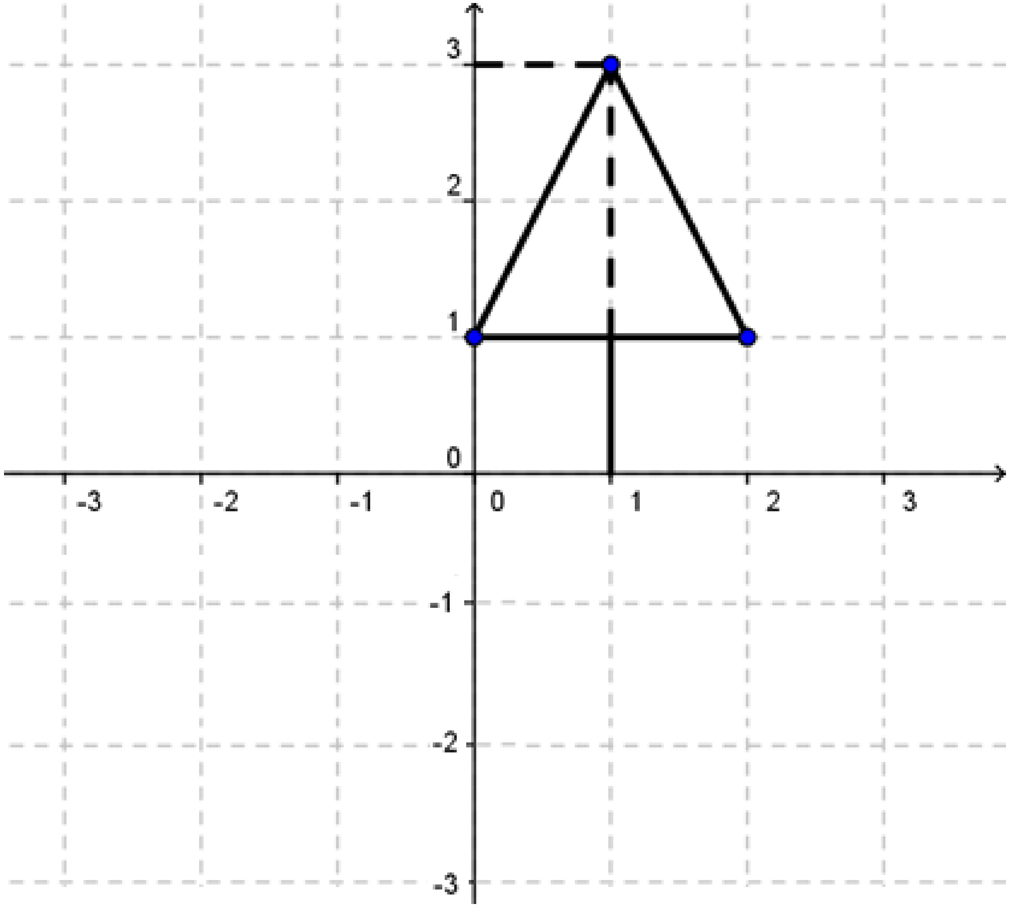
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Ejercicio: Trasladar el segmento AB según el vector $\vec{v} = (5, -1)$



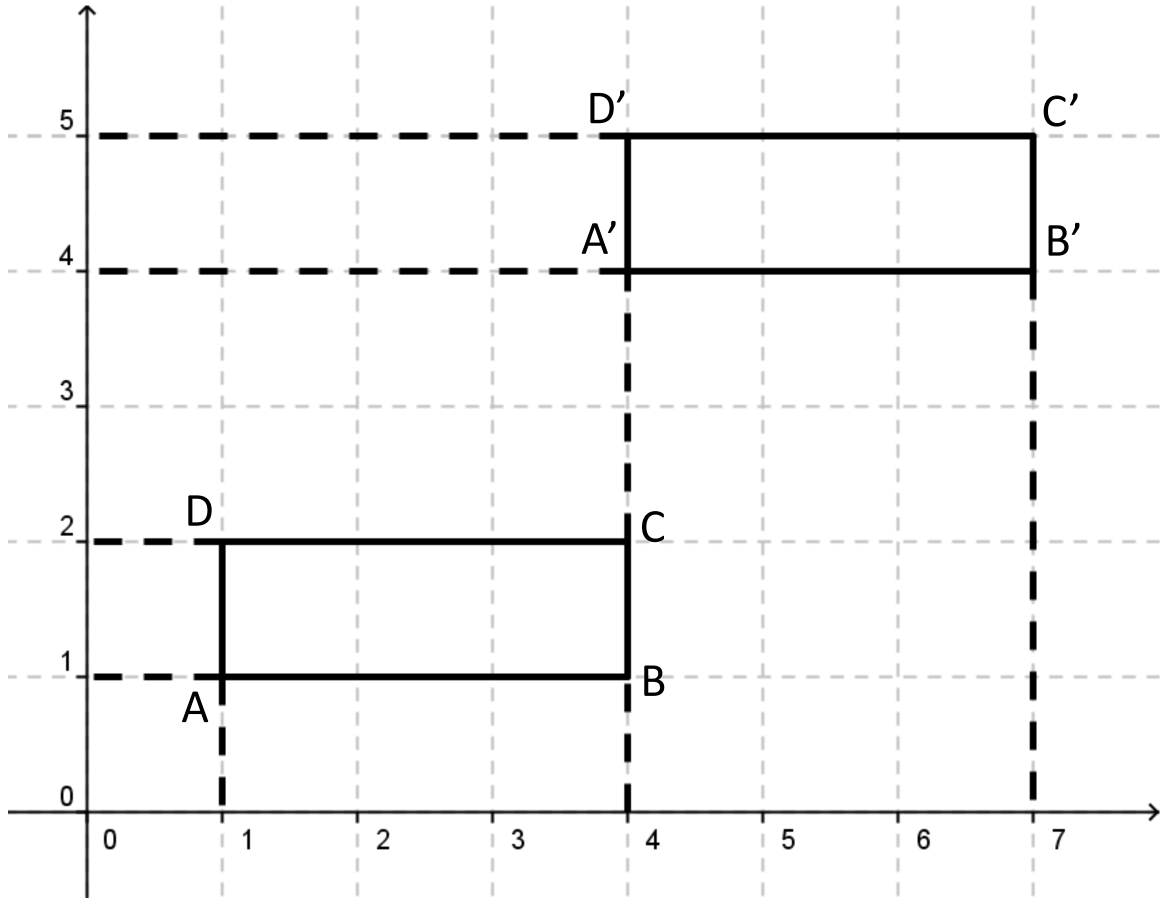
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Ejercicio: Trasladar el triángulo según el vector (-2, -4)



TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Ejercicio 6: Determinar el vector traslación del cuadrilátero del punto B a B’

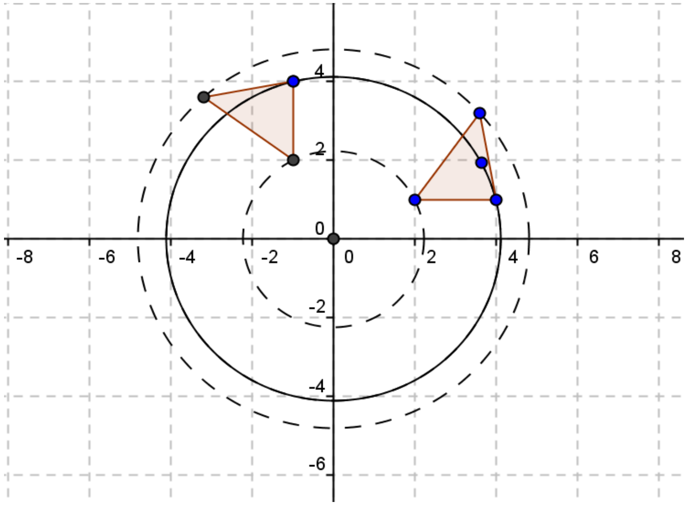


TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

3. Rotaciones

Una rotación es una transformación que asocia a cada punto del plano una imagen de acuerdo a un punto llamado Centro de Rotación y un ángulo de giro.

Son aquellas isometrías que permiten girar todos los puntos del plano. Cada punto gira siguiendo un arco que tiene un centro y un ángulo bien determinado, por lo que toda la rotación queda definida por su *centro de rotación* y por su *ángulo de giro*.



TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

3. Rotaciones

En una rotación se identifican tres elementos:

- El punto de rotación (centro de rotación): Que es el punto en torno al cual se va a efectuar la rotación; éste puede formar parte de la figura puede ser un punto exterior a ella.
- La magnitud de rotación: Que corresponde a la medida del ángulo determinado por un punto cualquiera de la figura original, el centro de rotación, o vértice del ángulo, y el punto correspondiente en la figura obtenida después de la rotación.

- El sentido de giro: Que puede ser positivo u antihorario (en el sentido contrario a las agujas del reloj) o negativo u horario(en el sentido de las agujas del reloj)

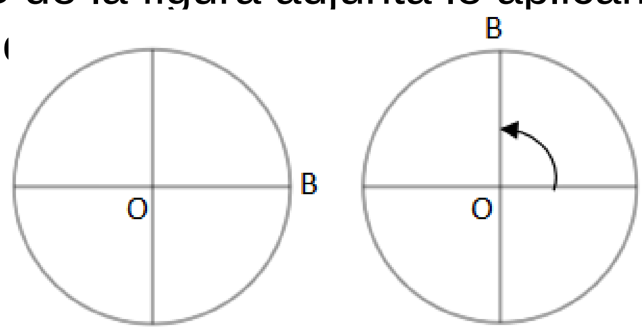
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

3. Rotaciones

- Una rotación con centro P y ángulo de giro α, se representa por R(P, α). Si la rotación es negativa, se representa por R(P, -α)
- Si rotamos el punto (x, y) con respecto al origen O(0, 0) en un ángulo de giro de 90°, 180°, 270° ó 360°, las coordenadas de los puntos obtenidos están dados en la siguiente tabla.

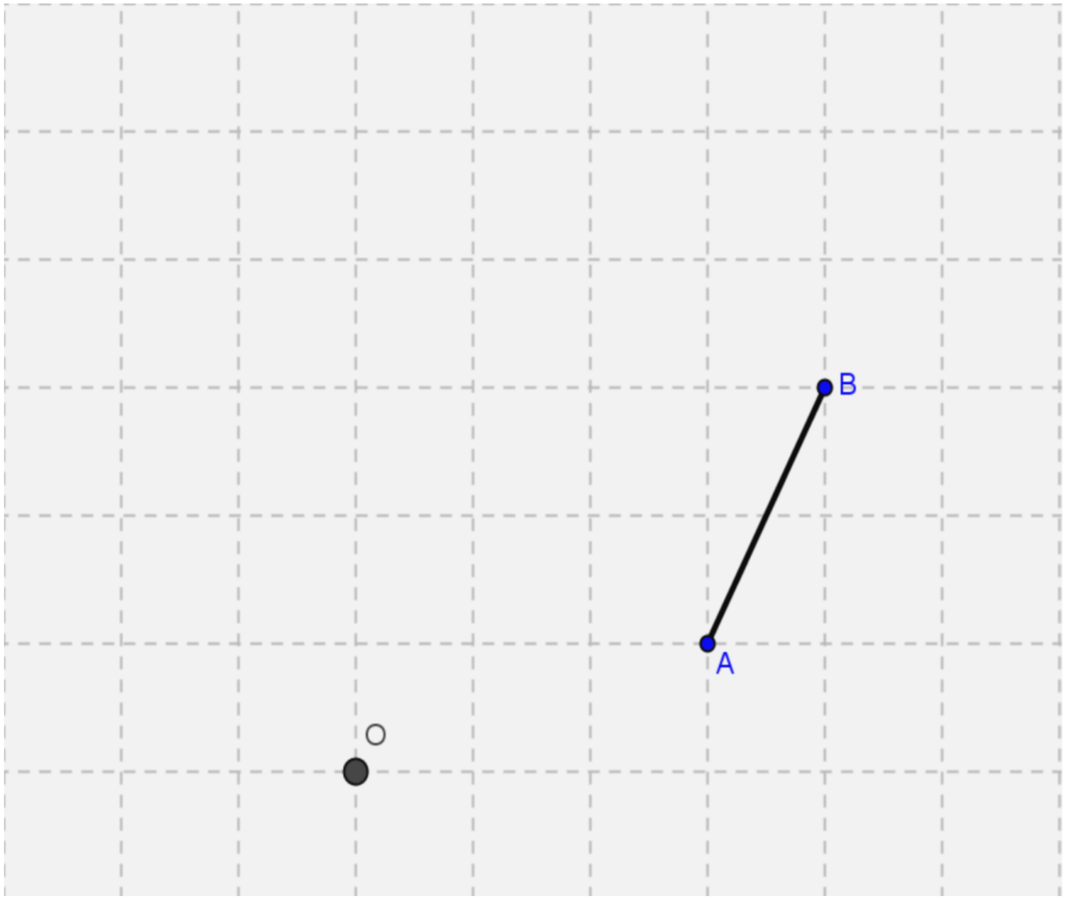
Antihorario	R (0, 90°)	R(0, 180°)	R(0, 270°)	R(0, 360°)
Horario	R(0, -270°)	R(0, -180°)	R (0, -90°)	R(0, -360°)
(x, y)	(-y, x)	(-x, -y)	(y, -x)	(x, y)

<u>Ejemplo 1</u>: Si al punto B de la figura adjunta le aplicamos una rotación de 90° en torno al centro de la



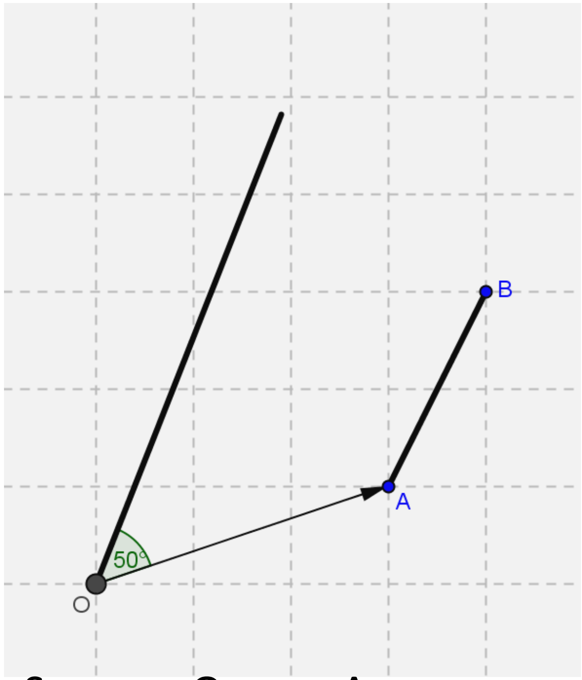
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Ejemplo 2: Al segmento $\overline{AB}$ de la figura se le hace una rotación de 50°

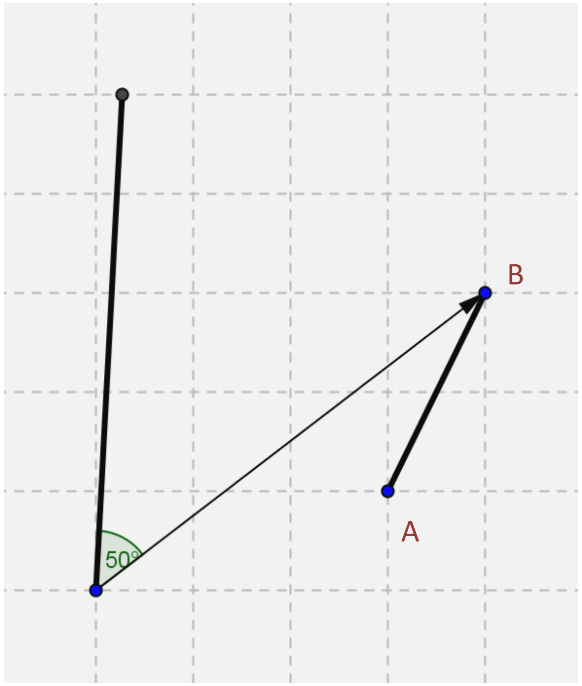


TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

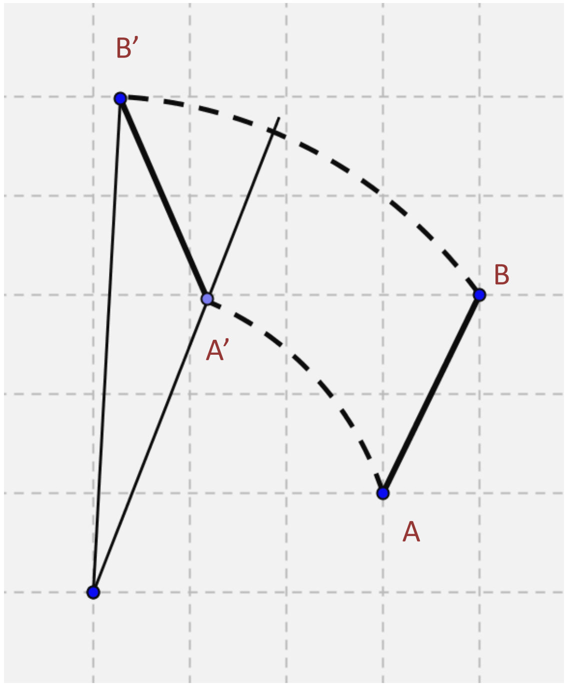
Ejemplo 2: Al segmento $\overline{AB}$ de la figura se le hace una rotación de 50°



Se une O con A con una línea y a partir de OA y se copia un ángulo de 50°



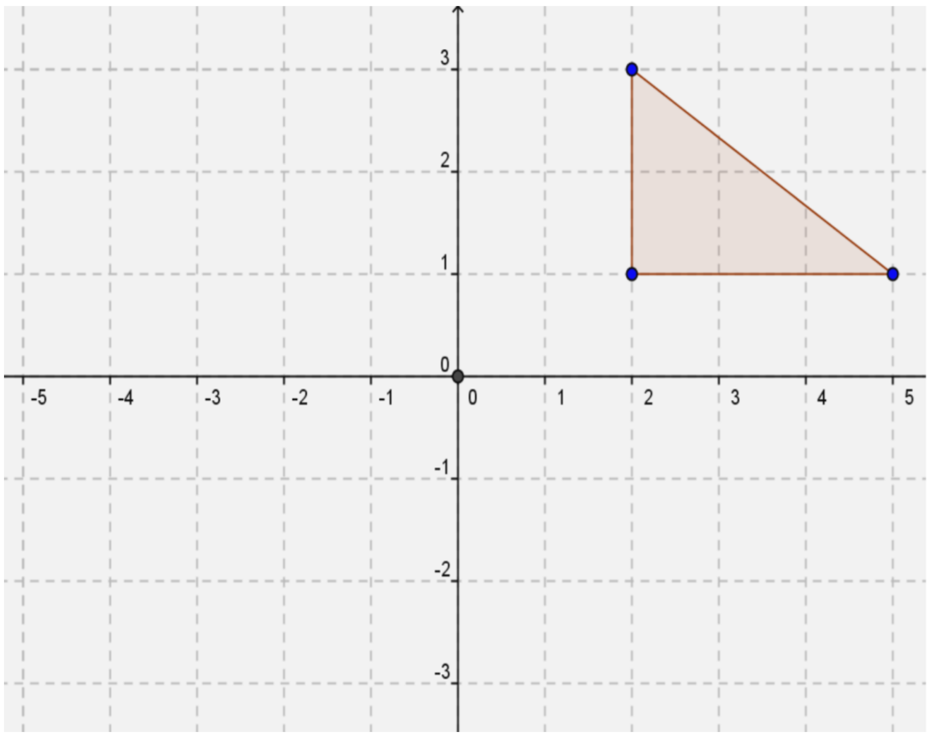
Se repite el mismo Procedimiento para R

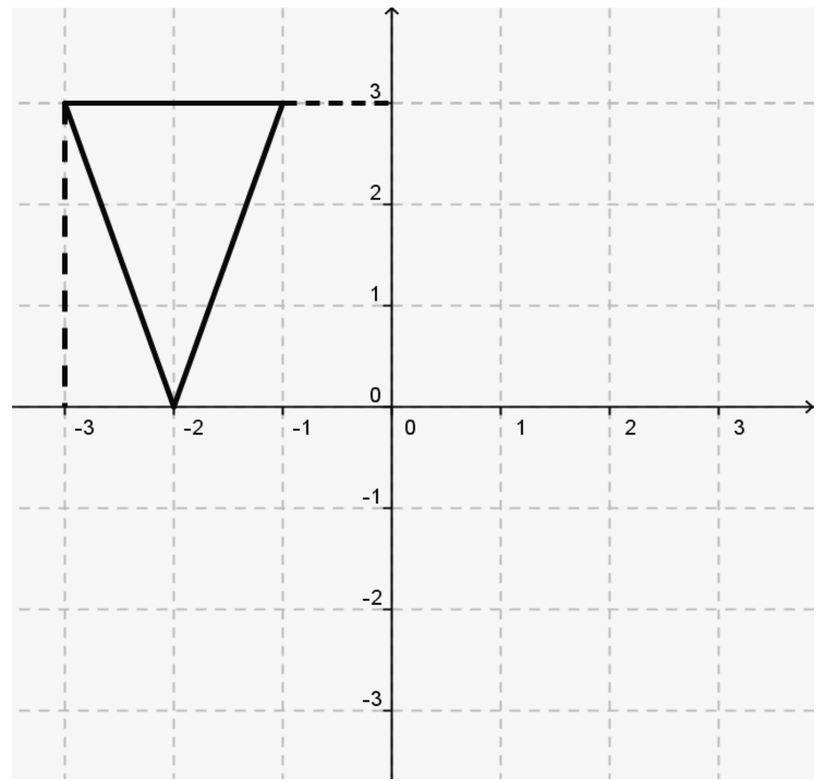


Utilizando un compás con centro O y radio igual a OA y OB se intersectan las imágenes en A’ y B’, obteniendo el segmento A’B’

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Ejercicio: Rotar el triángulo de la figura con un ángulo de 90°, 180°, 270° con punto de rotación el origen



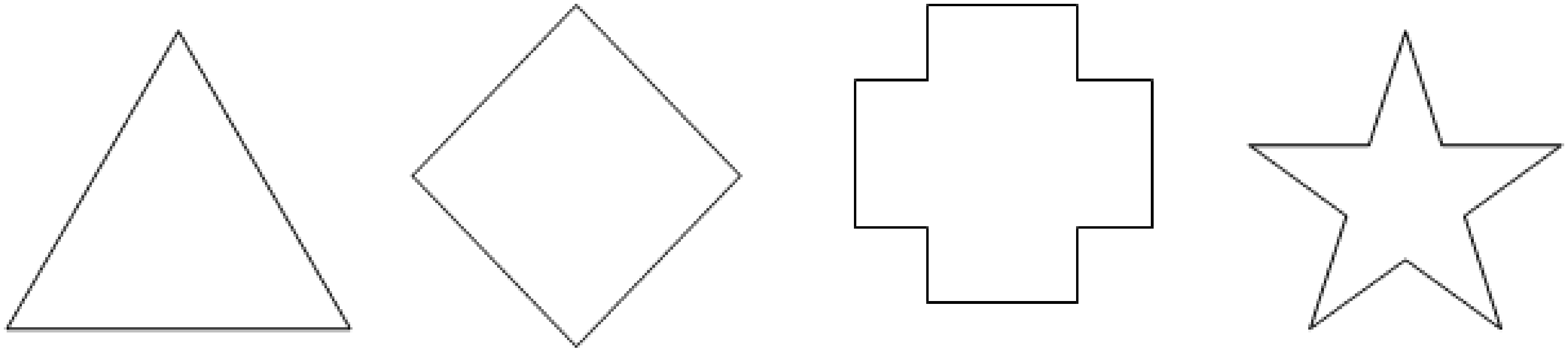


TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

3. Rotaciones

Definición de Simetría Rotacional

Una figura tiene simetría rotacional si al hacerla girar en torno a su punto central (O), ocupa la misma posición en el plano más de una vez, antes de dar una vuelta completa.



HOMOTECIA

HOMOTECIA:

Es una transformación geométrica que permite obtener figuras semejantes a partir de figuras geométricas cualesquiera.

La homotecia está definida a partir de tres elementos:

- La figura original
- El centro de la homotecia
- La razón de la homotecia

Al aplicar la homotecia de centro O y razón k a un punto P cualquiera, se obtiene otro punto, P', que es la imagen de P, de modo que P, O y P' son colineales y $\overline{OP'} = k\overline{OP}$

Ejemplo 1: El ejemplo muestra una homotecia de centro O y razón $k = \frac{1}{3}$, aplicada al punto P. Se cumple, $\overline{OP'} = \frac{1}{3}\overline{OP}$.

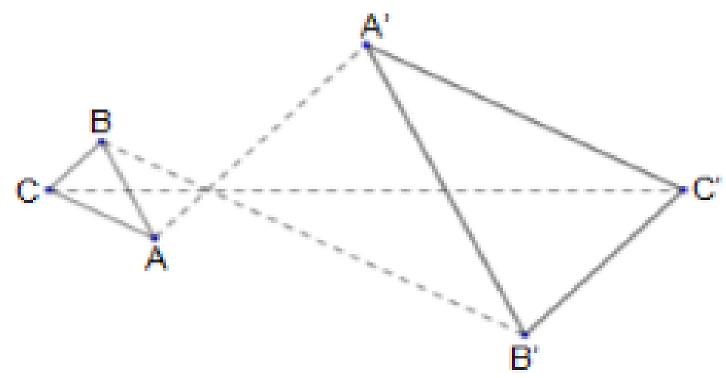
HOMOTECIA

Ejemplo 2: El ejemplo muestra una homotecia de centro O y razón k = 3, aplicada al punto P. Se cumple, $\overline{OP'} = 3\,\overline{OP}$.

En una homotecia de centro O y razón k, se cumple:

- Si $k > 1$, entonces el punto P' queda ubicado en $\overrightarrow{OP}$.
- Si $0 < k < 1$, entonces el punto P' queda ubicado entre O y P.
- Si $k < 0$, entonces el centro de la homotecia O queda ubicado entre P y P'.

Ejemplo 3: Apliquemos una homotecia de centro O y razón – 3. Al aplicar una homotecia de razón negativa se obtiene una imagen invertida de la figura original.



Observación: Al aplicar una homotecia a una figura geométrica se obtiene una figura semejante a la figura original.