

FUTURO

Preuniversitario

Matemática II

Probabilidades

Departamento de Matemática

Preuniversitario Futuro 2021



Conteo y Probabilidad

El conteo aparece en diversos asuntos de matemática como ¿de cuántas maneras se puede seleccionar un comité de dos hombres y tres mujeres de un grupo de 35 hombres y 40 mujeres? O ¿Cuántas patentes se pueden hacer con tres letras seguidas de tres números?, etc.

1) Principio del Conteo: Cuando dos eventos suceden uno tras otro, si el primero puede suceder de m formas y el segundo en n formas (después de haber sucedido el primero), entonces ambos pueden suceder, uno tras otro, en $m \bullet n$ formas distintas. Por Ejemplo:

- Hay tres pueblos P, Q y R, ubicados de tal manera que dos carreteras unen a P con Q y tres unen a Q con R. ¿Cuántas rutas distintas se pueden tomar para ir de P a R pasando por Q?
- En una gelatería se venden tres tipos de barquillo y 31 sabores de helados. ¿Cuántos helados distintos se pueden comprar?

F

- 2) **Notación Factorial**: Es el producto de los n primeros números naturales y se representa por la expresión $n!$ y se llama n factorial, donde $0! = 1$. Aquí **no existe la repetición, son elementos distintos y ordenados**

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Por Ejemplo:

- ¿De cuántas formas distintas puede terminar una competencia entre seis atletas, suponiendo que no hay empates?

Variación con repetición

En los n elementos hay repetición, hay elementos iguales y ordenados, es: $\frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$

- ¿De cuántas maneras pueden colocarse en línea nueve bolas de las cuales 4 son blancas, 3 amarillas, y 2 azules? (las bolitas del mismo color son iguales)
- Queremos ordenar los 7 libros que tenemos: 4 son de Matemáticas, 2 de lenguajes y 1 de física (los de la misma materia son iguales) ¿De cuántas formas podemos ordenarlos en el estante?



- 3) **Permutaciones sin repetición:** Una permutación de un conjunto de objetos distintos es un ordenamiento de esos objetos. La cantidad de permutaciones de n objetos es $n!$. Por ejemplo ¿cuántas permutaciones son posibles con las letras A B C D E F G H?

En general, si un conjunto tiene n elementos, el número de formas de ordenar a r elementos del conjunto se representa por $P(n,r)$ y se llama número de permutaciones de n objetos tomados de r en r y está dado por:

$$P(n,r) = n! / (n-r)!$$

Por Ejemplo:

- ¿Cuántas permutaciones de cinco letras son posibles con las letras ABCDEFGH?
- ¿Cuántas permutaciones formadas por tres letras se pueden tener con cinco letras?
- Un grupo de amigos tiene 9 integrantes. ¿De cuántas maneras pueden elegirse un Presidente, un Vicepresidente y un Secretario entre ellos?



Permutación con repetición: m^n

Ejemplo

El sistema de matrículas de vehículos consiste en un número de 4 dígitos seguido de un bloque de 3 letras consonantes.

(Ejemplo: 1614 - MRM).

- a) ¿Cuántas placas hay con un determinado bloque de letras?
- b) ¿Cuántas placas hay con la misma parte numérica?
- c) ¿Cuántas placas se pueden formar con este sistema?

Disponemos de 22 consonantes, $m = 22$.

Formamos grupos de 3 letras, $n = 3$.

$$VR_m^n = m^n \Rightarrow VR_{22}^3 = 22^3 = 10648 \text{ placas.}$$

$$VR_m^n = m^n \Rightarrow VR_{10}^4 = 10^4 = 10000 \text{ placas.}$$

Disponemos de 10 dígitos, $m = 10$.

Formamos grupos de 4 dígitos, $n = 4$.

$$VR_m^n = m^n \Rightarrow VR_{10}^4 = 10^4 = 10000 \text{ placas.}$$



4) **Combinaciones sin repetición:** Una combinación de r elementos de un conjunto es cualquier subconjunto de r elementos, sin tener en cuenta su orden. Si el conjunto tiene n elementos, el número de combinaciones de r elementos se representa por $C(n,r)$ y se le llama “número de combinaciones de n elementos tomados de r en r ”.

Por ejemplo:

Un conjunto con los cuatro elementos A , B , C y D . Las combinaciones de esos cuatro elementos tomados de tres en tres son:

ABC

ABD

ACD

BCD



Sin embargo, las permutaciones de esos elementos tomados de tres en tres son:

<i>ABC</i>	<i>ABD</i>	<i>ACD</i>	<i>BCD</i>
<i>ACB</i>	<i>ADB</i>	<i>ADC</i>	<i>BDC</i>
<i>BAC</i>	<i>BAD</i>	<i>CAD</i>	<i>CBD</i>
<i>BCA</i>	<i>BDA</i>	<i>CDA</i>	<i>CDB</i>
<i>CAB</i>	<i>DAB</i>	<i>DAC</i>	<i>DBC</i>
<i>CBA</i>	<i>DBA</i>	<i>DCA</i>	<i>DCB</i>

El número de combinaciones es bastante menor que el número de permutaciones.

En general, cada combinación de r objetos da lugar a $r!$ permutaciones de ellos. Así:

$$C(n,r) = n! / r! (n - r)!$$



F

diferencia principal entre los sin repetición Permutaciones y Combinaciones es el “orden”.

Si nos interesan arreglos ordenados, entonces estamos contando Permutaciones, pero si lo que nos ocupan son sólo subconjuntos sin considerar el orden, quiere decir que estamos contando Combinaciones.

Por Ejemplo:

- 1) Un club tiene nueve integrantes. ¿De cuántas formas se puede elegir una directiva de tres integrantes entre ellos?
- 2) Un curso de 20 alumnos elegirá una directiva de siete, formado por un Presidente, un Vicepresidente, un Secretario y cuatro Directores. ¿De cuántas formas se puede elegir esa directiva?

F

PROBABILIDADES

Si lanzamos dos dados, ¿qué probabilidades se tiene de salir un doble 6?
¿Cuál es la probabilidad que salga campeón la U? ¿y el CC?

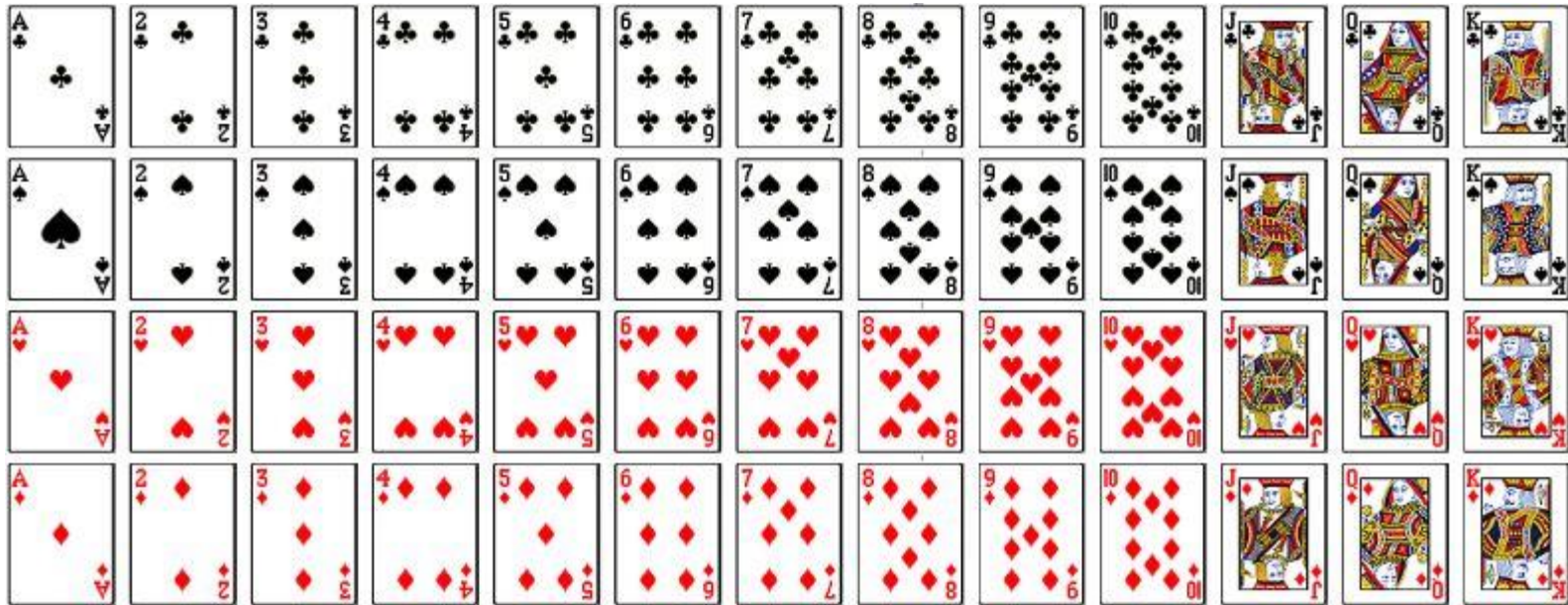
1) **Experimento**: Es un proceso con el que se obtienen **resultados** definidos, por ejemplo: Lanzar un dado, Lanzar una moneda, Lanzar dos dados.

2) **Espacio Muestral o Muestreo**: Es el conjunto de todos los resultados posibles. Por ejemplo:

- _Lanzar una moneda (2 resultados posibles): Cara, Sello;
- Lanzar un dado (6 resultados posibles): 1, 2, 3, 4, 5, 6;
- Lanzar dos monedas (4 resultados posibles): CC, CS, SC, SS;
- Lanzar dos dados (36 resultados posibles):
11 12 13 14 15 16
21 22 23 24 25 26
31 32 33 34 35 36
41 42 43 44 45 46
51 52 53 54 55 56
61 62 63 64 65 66

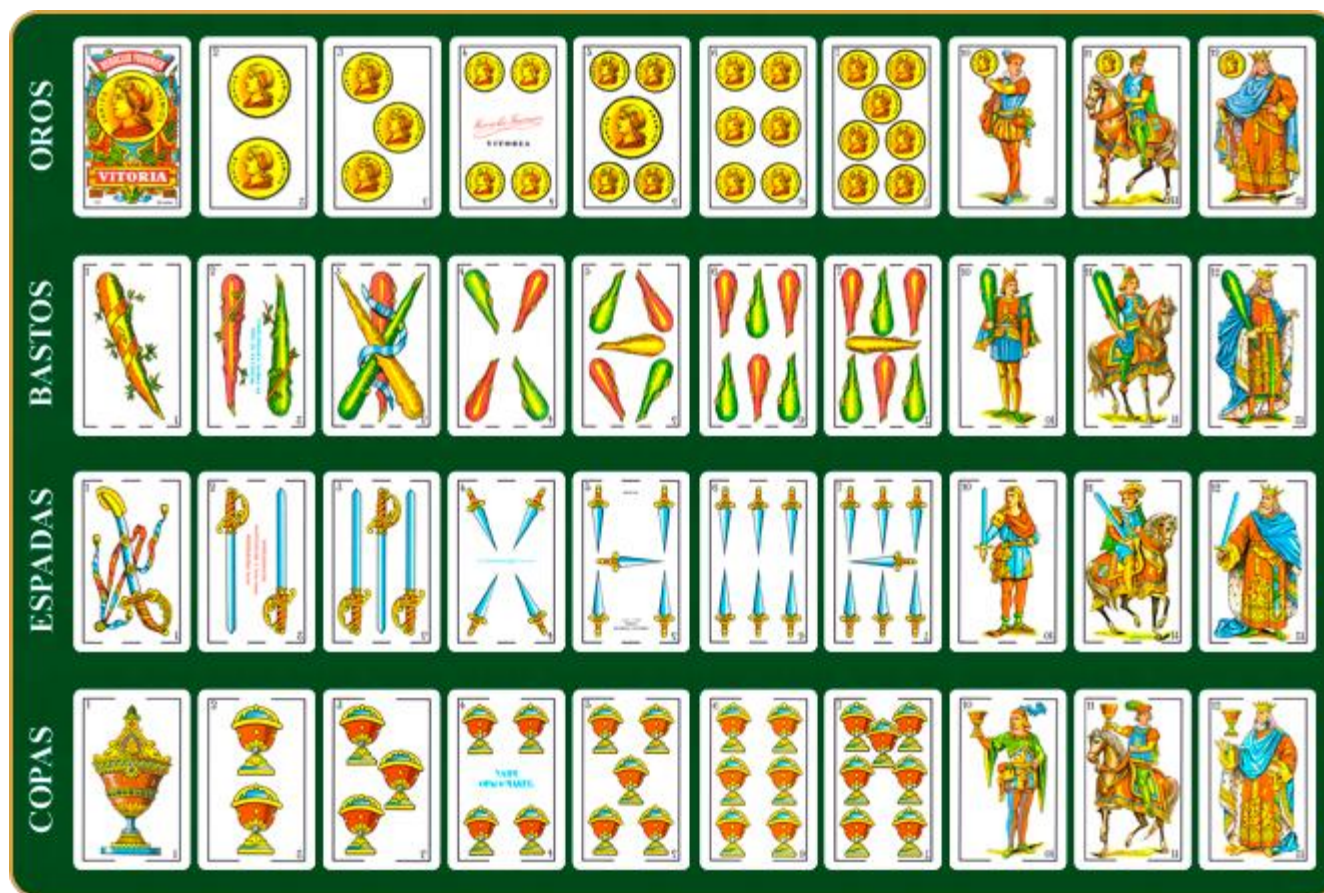
F

- Lanzar tres monedas (8 resultados posibles):
C C C S S S
C C S S S C
C S C S C S
S C C C S S
- Extraer una carta de un naipes inglés (52 resultados posibles):



F

- Naipes español





3. **Evento:** Es cualquier subconjunto del Espacio Muestral. Por ejemplo:

- Un experimento consiste en tirar tres veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad del evento sacar exactamente dos caras; de sacar cuando menos dos caras; no sacar caras?
- Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad del evento de sacar un número par?

4. **Probabilidad:** Sea S el espacio muestral de un experimento, y sea E un evento. La probabilidad de E se representa por $P(E)$ y es:

$$P(E) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}}$$

$$0 \leq P(E) \leq 1$$



5. **Eventos Mutuamente Excluyentes:** Sucede cuando dos eventos no tienen resultados en común, es decir, $A \cap B = \phi$.

Por ejemplo: Al sacar una carta de un naípe inglés, ¿cuál es la probabilidad de sacar un as o una reina?

6. **Probabilidad de la Unión de Eventos Mutuamente Excluyentes:** Es la probabilidad que ocurra un evento u otro evento, pero no ambos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Por ejemplo: Se saca una carta al azar, de un mazo normal de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad que sea un siete o una figura?



7. **Probabilidad de la Unión de Eventos No Excluyentes:** Es decir son eventos que comparten resultados y se determina como:

$$P (A \cup B) = P (A) + P (B) - P (A \cap B)$$

Por Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta, al azar, de un mazo normal de 52 cartas, y que sea una figura o bien un diamante?



8. Probabilidad de la Intersección de Eventos Independientes: Cuando la ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de otro, se dice que esos eventos son independientes, por ejemplo, al arrojar una moneda la probabilidad que salga cara en el primero y luego en el segundo lanzamiento.

$$P (A \cap B) = P (A) \bullet P (B)$$

Por ejemplo: Un frasco contiene cinco bolas rojas y cuatro bolas negras. Se saca al azar una bola y a continuación se reemplaza; después se saca otra bola. ¿Cuál es la probabilidad que ambas bolas sean rojas?



9. Eventos dependientes entre sí, Dos eventos son dependientes entre sí, siempre que el resultado de A incida en el de B. Luego,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Donde $P(B/A)$ significa que es la probabilidad que ocurra B dado que ha ocurrido A



DEMRE MODELO 2016

La probabilidad de que un feriante venda frutas un día determinado dado que está lloviendo es $\frac{1}{3}$. Si la probabilidad de que venda y llueva ese día es $\frac{1}{5}$, ¿cuál es la probabilidad de que **NO** llueva ese día?

- | | |
|--------------------|------------------|
| A) $\frac{14}{15}$ | D) $\frac{4}{5}$ |
| B) $\frac{1}{15}$ | E) $\frac{2}{5}$ |
| C) $\frac{2}{3}$ | |



F

Ley de Grandes Números

- A medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa (que corresponde a la razón entre el número de veces que ocurrió un suceso (A) y el número total de veces que se llevó a cabo el experimento) de un suceso cualquiera, se aproxima cada vez más a su probabilidad teórica designada como $P(A)$.
 - Ejemplo (DEMRE, 2012): Si se lanzan 5.000 veces dos dados comunes, entonces según la Ley de los Grandes Números, ¿en qué porcentaje, aproximadamente, de esas repeticiones, ocurrirá que la suma de los números obtenidos será mayor o igual a 6?
- A) En un 8%
 - B) En un 14%
 - C) En un 36%
 - D) En un 58%
 - E) En un 72%



Respuesta

Cuando se lanzan 5000 veces dos dados, se aplica la ley de grandes números, plantea que a medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un suceso se aproxima cada vez más a su probabilidad teórica.

En el experimento de lanzar dos dados comunes, se tienen que la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea mayor o igual a 6 es $26/36$

Suma	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{suma } 6 \text{ o más}) = 26/36$$

La ley de grandes números, al aumentar el experimento 5.000 veces se debe cumplir que la frecuencia relativa en la suma de los números sea también $26/36 = 0,72$, o sea 72%. R:E)