

FUTURO

Preuniversitario

Matemática B

Circunferencia

Departamento de Matemática

Preuniversitario Futuro



Contenido

- Ángulos y arcos en la circunferencia
- Cuerdas y secantes en la circunferencia
- Problemas que involucren las relaciones métricas en la circunferencia en diversos contextos

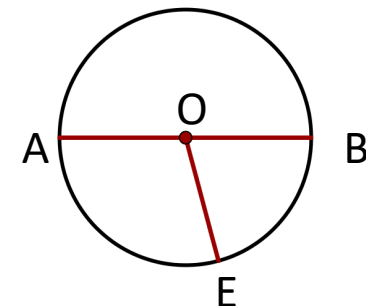
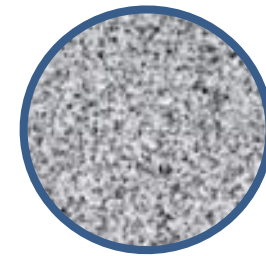
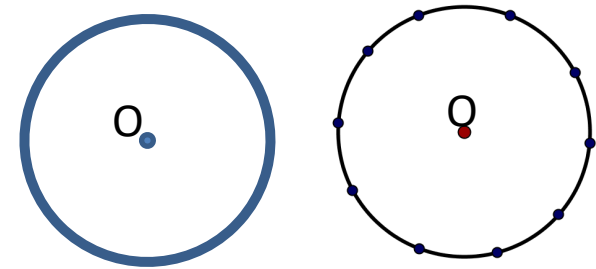


CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1) Definiciones:

- a. **Circunferencia**: Es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (O).
- b. **Círculo**: Es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de todos los puntos interiores a ella.
- c. **Radio (r)**: Es el trazo que une el centro de la circunferencia con cualquier otro punto de ella. Es la distancia desde el centro de la circunferencia con cualquier otro punto de ella

$$\overline{OB} = \overline{AO} = \overline{OE} = r$$



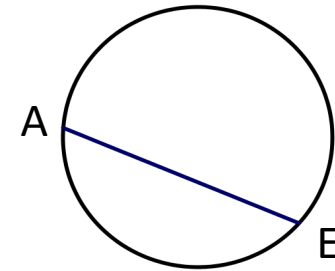


CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1) Definiciones:

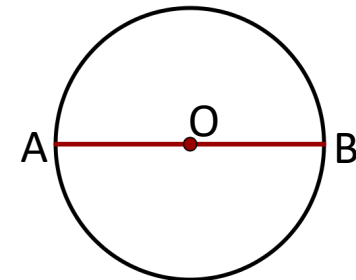
- d. **Cuerda**: Es el trazo que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia.

AE: Cuerda



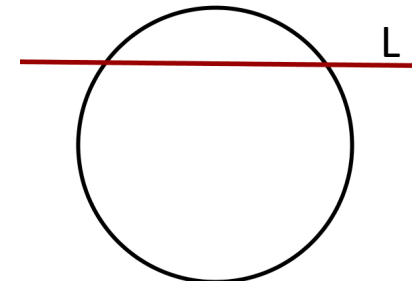
- e. **Diámetro**: Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

AB: Diámetro



- f. **Recta Secante**: Es la recta que intersecta la circunferencia en dos puntos.

L : Recta Secante



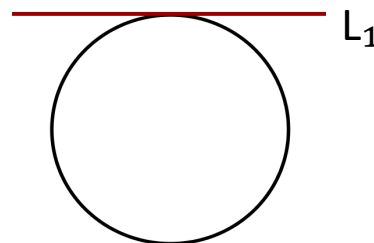


CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1) Definiciones:

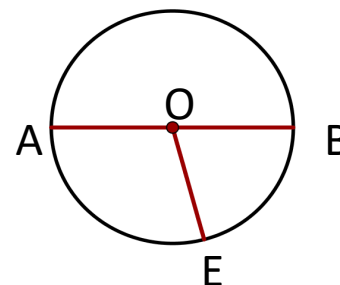
- g. **Recta tangente**: Es la recta que intersecta la circunferencia en un solo punto.

L_1 : Recta Tangente



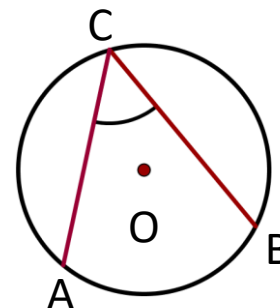
- h. **Ángulo del Centro**: Es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios de ella.

Ángulo del centro: $\angle AOE$; $\angle EOB$; $\angle BOA$



- h. **Ángulo Inscrito**: Es el aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

Ángulo inscrito: $\angle ACB$



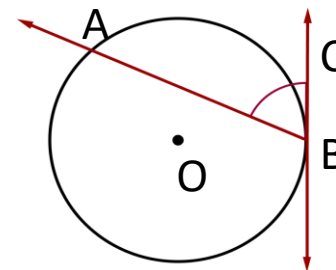
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1) Definiciones:

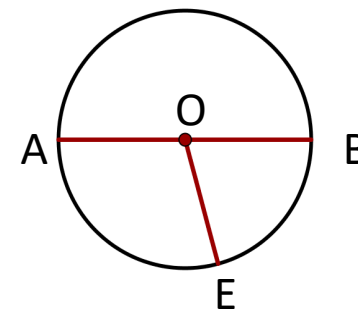
- j. **Ángulo Semi-Inscrito:** Es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son una tangente y una secante.

$\angle CBA$: Ángulo Semi-Inscrito



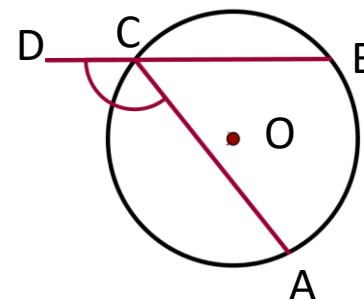
- k. **Arco:** Parte de la circunferencia.

$\widehat{BA}$: Arco $\widehat{AE}$: Arco $\widehat{EB}$: Arco



- l. **Ángulo ex-inscrito:** Es el ángulo adyacente a un ángulo inscrito.

$\angle DCA$: Ángulo ex-inscrito



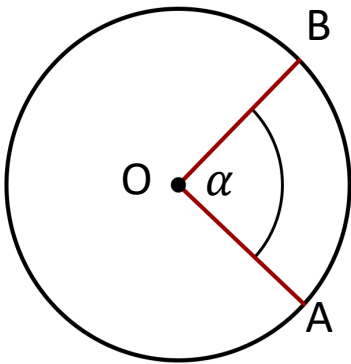


CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

2) Medición de Arcos

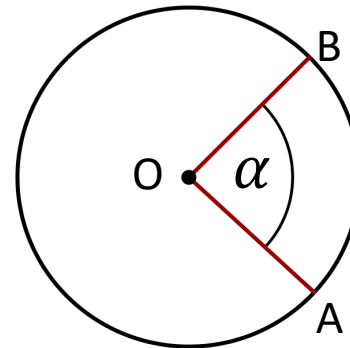
Los arcos en una circunferencia se leen en sentido contrario a los punteros del reloj y para medir el arco de una circunferencia existen dos métodos.

a) En **Grados Sexagesimales**: El arco mide lo mismo que el ángulo del centro que subtiende.



$$\widehat{AB} = \sphericalangle AOB = \alpha$$

b) En **Unidades de Longitud**: Se mide la longitud del arco desde A a B

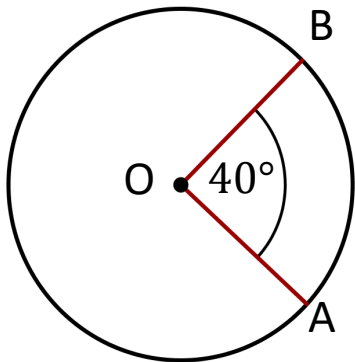


$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\widehat{AB}}{2\pi r}$$
$$\widehat{AB} = \frac{\alpha \pi r}{180^\circ}$$



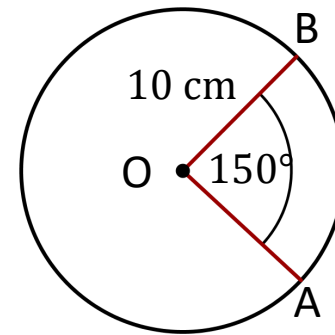
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Ejemplo 1: O es el centro de la circunferencia y el arco AB mide 40° ¿cuánto mide el ángulo del centro AOB?



$$\widehat{AB} = \sphericalangle AOB = 40^\circ$$

Ejemplo 2: O es el centro de la circunferencia, el radio de la circunferencia mide 10 cm y su ángulo del centro AOB mide 150° ¿cuánto mide el la longitud del arco AB?



$$\widehat{AB} = \frac{\alpha \pi r}{180^\circ}$$

$$\widehat{AB} = \frac{150^\circ \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm}}{180^\circ}$$

$$\widehat{AB} = \frac{25\pi \text{ cm}}{3}$$

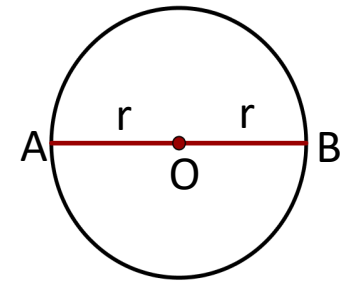


CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3) Propiedades de las Cuerdas:

3.1) Teorema 1: El diámetro es la mayor cuerda de toda la circunferencia.

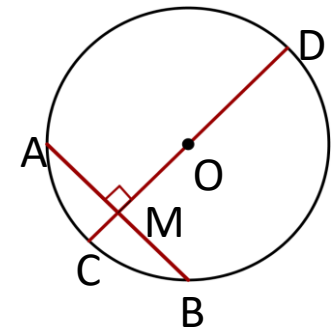
$$\overline{AB}: \text{Cuerda} \qquad \overline{AB} = 2r$$



3.2) Teorema 2: Todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.

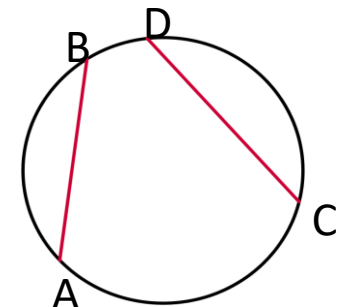
$$\overline{CD} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{MB}$$

$$\overline{OM} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{MB} \qquad \overline{OC}: \text{Radio}$$



3.3) Teorema 3: En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes a cuerdas congruentes le corresponden arcos congruentes.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow \widehat{BA} \cong \widehat{CD}$$





CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3) Propiedades de las Cuerdas:

Teorema 4: En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, a mayor cuerda corresponde mayor arco.

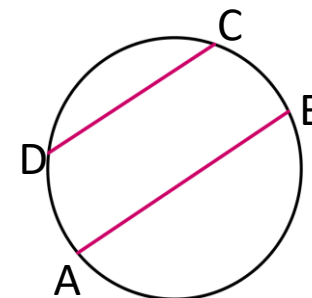
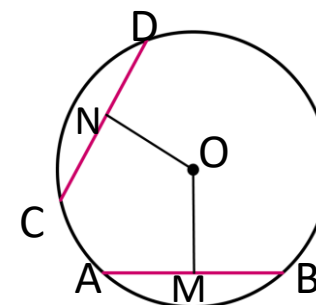
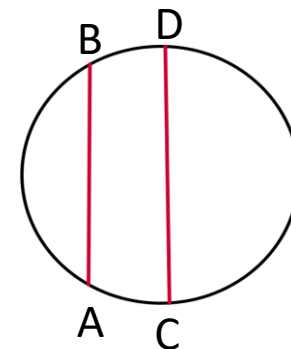
$$\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow \widehat{BA} < \widehat{CD}$$

Teorema 5: En circunferencia o en circunferencia congruentes, cuerdas congruentes equidistan

$$\text{Si } \overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{OM} \cong \overline{ON}$$

Teorema 6: En toda circunferencia, cuerdas paralelas determinan arcos congruentes.

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Leftrightarrow \widehat{DA} \cong \widehat{BC}$$





CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

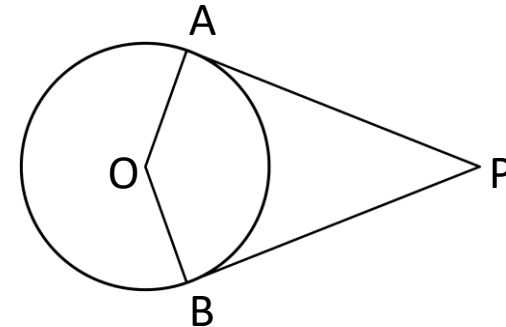
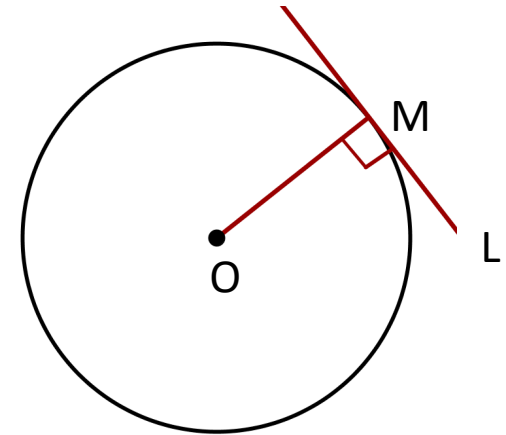
3) Propiedades de las Cuerdas:

Teorema 7: Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio cuyo extremo es el punto de contacto.

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

$$L \text{ recta tangente } L \cap \overline{OM} = M \Rightarrow L \perp \overline{OM}$$

Teorema 8: Las rectas tangentes trazadas a una circunferencia desde un mismo punto exterior son congruentes. Si AP y BP son tangentes a la circunferencia, entonces, $AP \cong BP$.

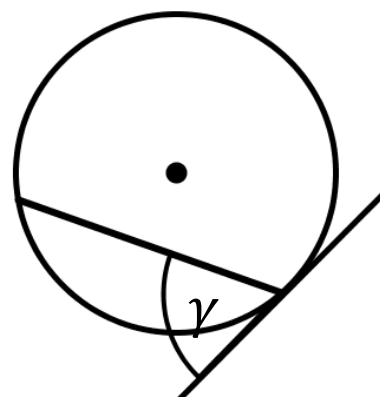
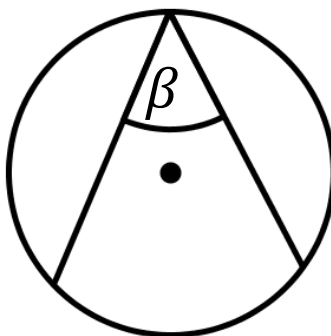
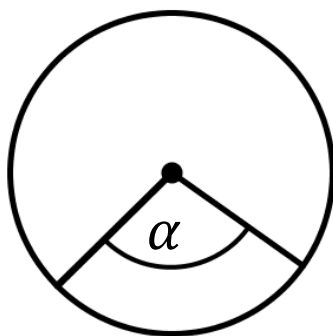


F

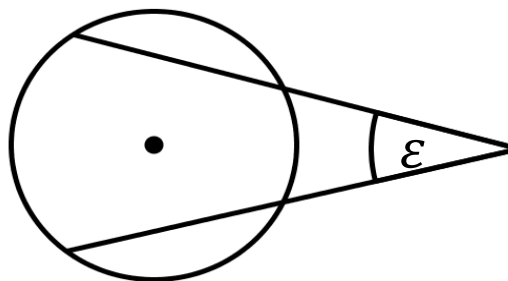
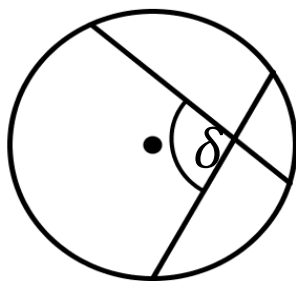
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

4) Ángulos en una Circunferencia

- 1) Ángulo del centro 2) Ángulo inscrito 3) Ángulo Semi-inscrito



- 4) Ángulo Interior 5) ángulo Exterior



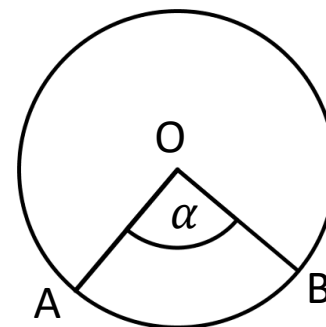


CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5) Propiedades de los Ángulos: Teoremas

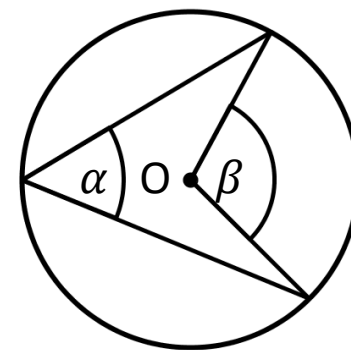
5.1) Teorema 1: La medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.

$$\sphericalangle \alpha = \overset{\frown}{AB}$$



5.2) Teorema 2: La medida de todo ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

$$\sphericalangle \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle \beta$$



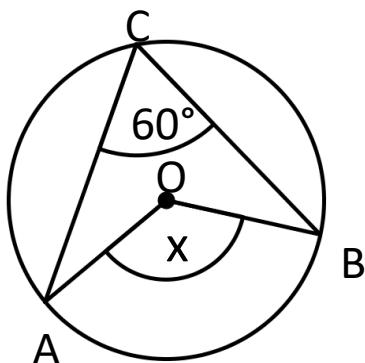
F

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Ejemplos:

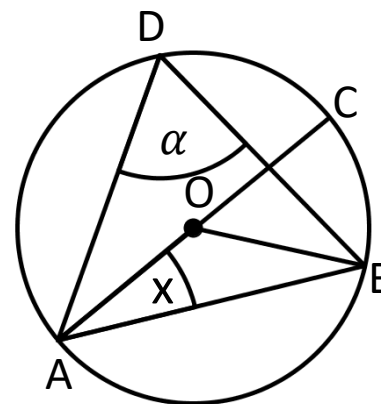
1) ¿Cuánto mide $\angle x$?

- A) 10°
- B) 30°
- C) 60°
- D) 120°
- E) 150°



2) En la circunferencia de centro O, AC diámetro entonces $\angle x$ en función de $\angle \alpha$ mide:

- A) 2α
- B) $90^\circ - \alpha$
- C) $\frac{\alpha}{2}$
- D) $180^\circ - 2\alpha$
- E) Ninguna de las Anteriores



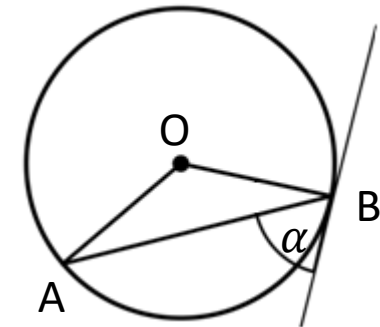


CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

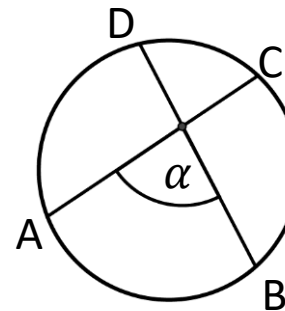
Propiedades de los Ángulos: Teoremas

Teorema 3: La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \widehat{AB} \quad \angle \alpha = \frac{1}{2} \angle AOB$$



Teorema 4: La medida del ángulo interior es igual a la semi-suma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y sus prolongaciones.



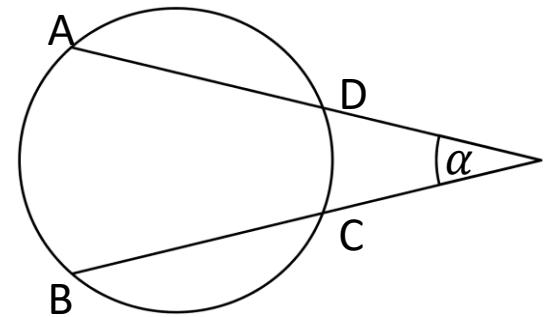
$$\angle \alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$



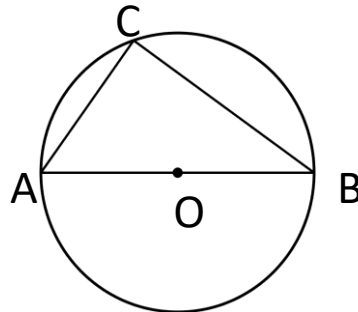
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Teorema 5: La medida del ángulo exterior es igual a la semi-diferencia de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados.

$$\angle \alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$



Teorema 6: Si un ángulo subtiende una semicircunferencia, entonces es recto.



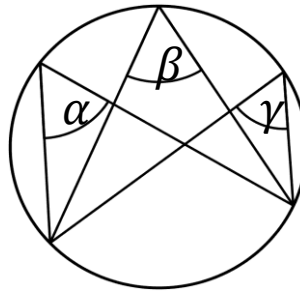
Si $\overline{AB}$ es diámetro $\Leftrightarrow \angle ACB = 90^\circ$



CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

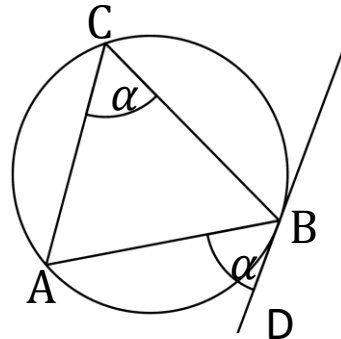
Propiedades de los Ángulos: Teoremas

Teorema 7: Los ángulos inscritos en una circunferencia que subtenden el mismo arco son congruentes.



$$\alpha \cong \beta \cong \gamma$$

Teorema 8: El ángulo semi-inscrito en una circunferencia es congruente con el ángulo inscrito que subtende el mismo arco.

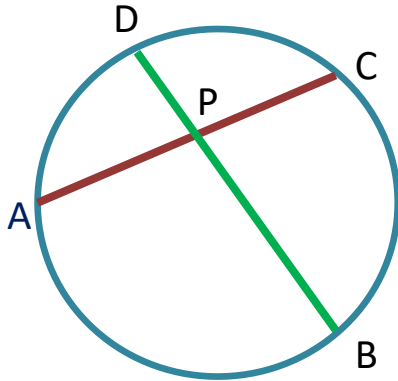




SEMEJANZAS Y CONGRUENCIAS

Relaciones métricas en la circunferencia:

a) Teorema de las cuerdas:



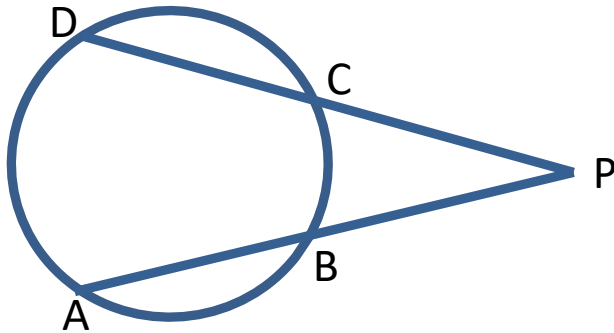
$$\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{BP} \cdot \overline{PD}$$



SEMEJANZAS Y CONGRUENCIAS

Relaciones métricas en la circunferencia:

b) Teorema de las secantes:



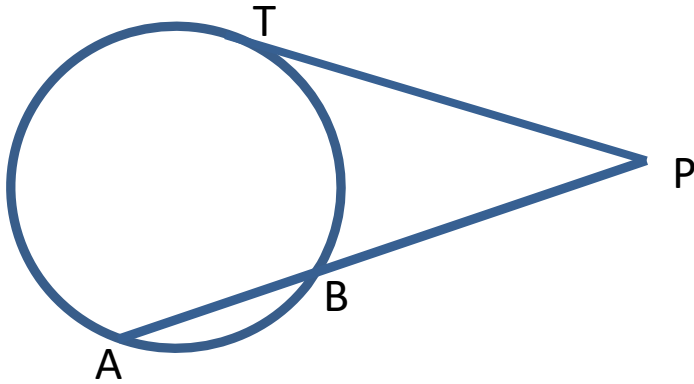
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PC}$$

F

SEMEJANZAS Y CONGRUENCIAS

Relaciones métricas en la circunferencia:

c) Teorema de la tangente y la secante:



$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$